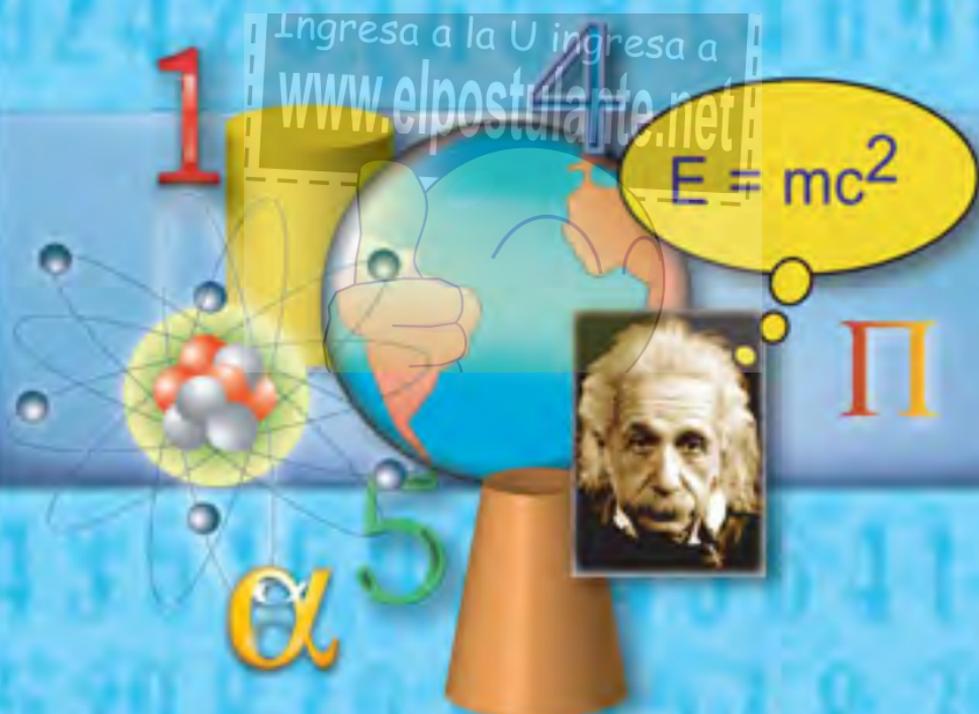


FÓRMULAS MATEMÁTICAS

ÁLGEBRA ARITMÉTICA TRIGONOMETRÍA



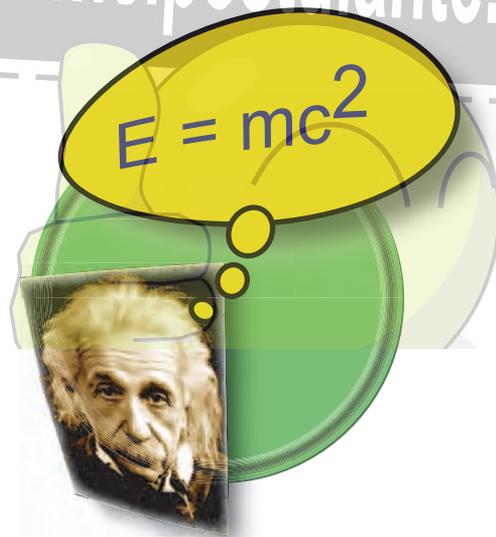
GEOMETRÍA

FÍSICA

QUÍMICA

FÓRMULAS MATEMÁTICAS

Ingresar a la U ingresar a
www.elpostulante.net





FÓRMULAS MATEMÁTICAS

IDEA, DISEÑO Y REALIZACIÓN

Departamento de Creación Editorial de Lexus Editores

© LEXUS EDITORES S.A.

Av. Del Ejército 305 Miraflores, Lima-Perú

www.lexuseditores.com

Primera edición, febrero 2008

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca

Nacional del Perú: 2008-01603

ISBN: 978-9972-209-54-3

EDICIÓN 2008

PRESENTACIÓN

Al igual que René Descartes, gran matemático y filósofo del siglo XVII, quien hubiera preferido una ciencia única o “matemática universal”, que explique el *orden* y la *medida* de la naturaleza, sin importar si la unidad de medida son números, o ecuaciones o gráficos, el presente “Formulario Matemático” pretende realizar una exposición de todos los métodos matemáticos en un solo documento.

Como es habitual, Editorial Lexus pone a disposición del estudiante avanzados recursos que contribuirán a minimizar diferencias teóricas y prácticas entre el nivel secundario y la universidad. Se ha pretendido crear un manual educativo para que el alumno en la etapa pre-universitaria, a través de la práctica directa de sus ejercicios, pueda auto-evaluarse y pronosticar sus capacidades con vistas a iniciar sus estudios superiores. Y, al mismo tiempo, servir como obra de consulta general.

La preparación de esta formidable obra ha sido posible debido a la participación de un selecto equipo de estudiantes universitarios y calificados docentes especialistas. Este libro resume más de 4 mil maravillosos años de investigación matemática. Desde las antiguas aritmética y álgebra, escudriñadas por babilonios y egipcios hasta las modernas técnicas y aplicaciones, que permiten actividades cotidianas de complicado análisis, como el pronóstico del tiempo, el movimiento bancario o la telefonía móvil, imposibles sin el concurso de todas las disciplinas matemáticas.

Este manual incluye secciones de Física y Química pues, como señalaba Von Neumann, las matemáticas poseen una doble naturaleza: las matemáticas como cuerpo científico propio, independientes de otros campos, y las matemáticas relacionadas con las ciencias naturales. De hecho, muchos de los mejores resultados alcanzados en las matemáticas modernas han sido motivados por las ciencias naturales y, similarmente, hay una tremenda *matematización* de las partes teóricas de dichas ciencias¹.

El método práctico utilizado en toda la extensión de esta obra, conduce al lector de una manera didáctica a lo largo de la asignatura, pasando de lo más sencillo a lo más complejo, con numerosos ejercicios resueltos y propuestos. La resolución de problemas y el repaso teórico no dudamos que le darán al estudiante una base muy sólida para que destaque en las aulas universitarias de pre-grado o post-grado.

Los Editores

¹ Referencias históricas consultadas en: José M. Méndez Pérez. “Las Matemáticas: su Historia, Evolución y Aplicaciones”. Archivo online: <http://www.divulgamat.net/weborriak/TestuakOnLine/HasierakoIkasgaiak/Mendez2003-04-extendida.doc>.

SUMARIO

Pag.

Aritmética	15
Definición, Lógica matemática, Proporciones lógicas, Conectivos lógicos	15
Proporciones simples, Proporciones compuestas básicas	16
Tablas de verdad de las proporciones compuestas básicas	16
Tipo de proporciones, Tautología	16
Contradicción, Contingencia	17
Leyes lógicas principales	17
Teoría de conjuntos, Conceptos básicos, Formas de expresar un conjunto	19
Principales símbolos	19
Notación de los conjuntos, La recta real	20
Características de los conjuntos, Relaciones entre conjuntos	21
Conjunto de conjunto o conjunto de partes, Potencia de un conjunto	21
Diagramas de Venn, Operaciones con conjuntos	22
Unión de conjuntos, Intersección de conjuntos, Diferencia de conjuntos	22
Complemento de un conjunto, Diferencia simétrica	23
Producto cartesiano de dos conjuntos, Relaciones	23
Tipos de relaciones en un conjunto, Reflexiva, Simétrica, Transitiva	24
Funciones, Definición, Sistema de numeración	25
Numeración, Definición	25
Formación de un sistema de numeración	26
Convención, Cifras mínimas	26
Operaciones aritméticas básicas no decimales	27
Suma, Resta, Multiplicación	27
División, Cambios de base de un sistema de numeración	28
Cambios de base se un sistema de numeración	28
Conteo de cifras al escribir la serie natural	29
Sumatoria de primeros números de la serie natural en base 10	29
Operaciones básicas sobre números reales	30
Suma o adición, Resta o sustracción	30
La multiplicación, La división	31
Alternaciones de los términos de una división	32
Relaciones notables de las cuatro operaciones	33
Propiedades de los números, Divisibilidad (en Z), Divisor, Múltiplo	33
Propiedades de la divisibilidad, Reglas prácticas de divisibilidad	34

Números congruentes, Números primos (en \mathbb{N})	35
Números compuestos, Criba de Eratóstenes, Reglas para su construcción	36
Fórmulas generales	36
Máximo común divisor(M.C.D.), Mínimo común múltiplo(m.c.m.)	37
Propiedades, Números racionales(fraciones)	38
Fraciones ordinarias, Clasificación	38
Fraciones decimales, Clasificación	39
Transformación de fracciones, Potencia y radicación de cuadrados y cubos	40
Cuadrado y raíz cuadrada	40
Cuadrado, Cuadrado perfecto, Raíz cuadrada	40
Cubo, Raíz cúbica, Sistema de medidas, Sistemas tradicionales	41
Sistema métrico	41
Medidas agrarias, Medidas de volumen, Medidas de capacidad, Medidas de peso	42
Sistema español, Superficie, Agraria, Volumen, Peso	42
Sistema inglés, Longitud, Superficie, Agraria	42
Volumen, Capacidad, Sistema Avoirdupois, Densidad de algunos cuerpos	43
Relaciones entre longitud y tiempo, Dimensiones geográficas	43
Sistema internacional(S.I.), Unidades de bases	43
Unidades suplementarias, Razones y proporciones, Razones	44
Propiedades y leyes, Proporciones, Proporción aritmética	44
Proporción geométrica, Clases de proporciones según sus términos	44
Términos notables, Promedios, Propiedades de las proporciones geométricas	45
Magnitudes proporcionales, Regla de tres, Regla de tres simple	46
Regla del tanto por ciento, Regla de tres compuesta	46
Aritmética mercantil, Interés simple, Interés o rédito	46
Fórmulas básicas	46
Descuento, Descuento comercial, Descuento racional	47
Comparación del descuento comercial con el descuento racional	48
Vencimiento común, Descuentos sucesivos, Aumentos sucesivos	48
Repartimiento proporcional, Tipología	49
Repartimiento proporcional compuesto	50
Aplicaciones, Regla de compañía o de sociedad, Regla de compañía compuesta	50
Regla de mezcla o aligación, Mezcla, Regla de mezcla directa	50
Regla de mezcla inversa, Aleación, Ley de aleación	51
Aleación directa, Aleación inversa, Cambios en la ley de una aleación	51
Aumento de la ley de una aleación, Disminución de la ley de una aleación	51
Ley de kilates	52

Álgebra 53

Definición, Notación usada en el álgebra	53
Operaciones fundamentales con los números relativos	54
Suma, Sustracción, Multiplicación	54
División, Potencia, Raíces	55
Expresiones algebraicas, Principales conceptos, Término algebraico	55
Expresión algebraica	55
Clasificación de las expresiones algebraicas	55
Racionales, Irracionales	55
Teoría de exponentes, Operaciones de exponentes, Ley de signos	56
Ecuaciones Exponenciales, Valor numérico	57
Grado de las expresiones algebraicas, Grados	57
Grados de un monomio, Grados de un polinomio	57
Polinomios, Notación polinómica, Polinomios especiales	58
Polinomios ordenados, Polinomio completo	58
Polinomio Homogéneo, Polinomios idénticos	58
Polinomio idénticamente nulo, Polinomio entero en "x"	59
Operaciones con expresiones algebraicas	59
Suma y resta de expresiones algebraicas, Supresión de signos de colección	59
Multiplicación de expresiones algebraicas, Propiedades de la multiplicación	59
Casos en la multiplicación, Productos notables	60
División algebraica, Propiedades de la división	61
Casos en la división, División de dos monomios	61
División de polinomios, Método normal	61
Método de coeficientes separados, Método de Horner	62
Método o regla de Ruffini	63
Teorema del resto, Divisibilidad y cocientes notables	65
Principios de la divisibilidad	65
Cocientes notables(CN), Forma general de los cocientes notables	66
Regla práctica para desarrollar cualquier cociente notable	66
Métodos de factorización, Factor común,	67
Método de identidades, Método del aspa	68
Método de evaluación o de divisores binomios	69
Método de artificios de cálculo, Sumas y restas, Cambio de variable	70
Factorización recíproca, Factorización simétrica alternada	71
Polinomio simétrico, Polinomio alterno	71
Propiedades de las expresiones y los polinomios simétricos y alternos	71
Factorización de un polinomio simétrico y alternado	72
Máximo común divisor y Mínimo común múltiplo	72
Fracciones algebraicas, Definición	73

Cambios de signo en una fracción	73
Simplificación de fracciones, Binomio de Newton	73
Análisis combinatorio, Factorial de un número	73
Variaciones, Permutaciones, Combinaciones	74
Propiedades de las combinaciones	74
Desarrollo del binomio de Newton, Método inductivo	75
Propiedades del Binomio de Newton	76
Cálculo de término general $t_{(k+1)}$, Término central	76
Término de Pascal o de Tartaglia, Procedimiento	77
Desarrollo del binomio de Newton con exponente negativo y/o fraccionario	77
Radicación, Definición	77
Elemento de una raíz, Signo de las raíces	78
Radicación de expresiones algebraicas	78
Raíz de un monomio, Raíz cuadrada de un polinomio	78
Raíz cúbica de un polinomio	79
Descomposición de radicales dobles en simples	80
Operaciones con radicales, Conceptos básicos	81
Radicales homogéneos, Homogenización de radicales	81
Radicales semejantes, Teorema fundamental de los radicales	81
Operaciones algebraicas con radicales	81
Suma y resta de radicales, Multiplicación de radicales	81
División de radicales, Potencia de radicales, Raíz de radicales	82
Fracción irracional, Racionalización, Factor racionalizante (F.R.)	82
Racionalización del denominador de una fracción, Primer caso, Segundo caso	82
Tercer caso. Cuarto caso, Verdadero valor de fracciones algebraicas	83
Verdadero valor (V.V.), Cálculo del verdadero valor	84
Cantidades imaginarias, Conceptos	85
Números complejos, Representación gráfica de un complejo	86
Operaciones con complejos, Determinantes, Matriz	87
Determinante, Orden del determinante	88
Método para hallar el valor de un determinante, Regla de Sarrus	88
Forma práctica de la regla de Sarrus, Menor complementario	89
Propiedades de los determinantes, Ecuaciones y sistemas de ecuaciones	90
Clases de igualdad	90
Principios fundamentales de las igualdades para la transformación de ecuaciones	91
Sistema de ecuaciones, Clasificación de los sistemas de ecuaciones	91
Métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales, Método de sustitución	91
Método de igualación, Método de reducción, Método de los determinantes	92
Ecuaciones de segundo grado y ecuaciones bicuadráticas	93

Ecuaciones de segundo grado	93
Discusión del valor de las raíces	94
Propiedades de las raíces, Ecuaciones bicuadradas	94
Propiedades de las raíces de una ecuación bicuadrada	95
Ecuaciones recíprocas, Ecuaciones binomias y trinomias	95
Ecuaciones que se resuelven mediante artificio, Desigualdad e inecuaciones	96
Desigualdad, Propiedades de las desigualdades	96
Clases de desigualdades, Inecuaciones de primer grado con una incógnita	97
Solución de una inecuación	97
Sistema de inecuaciones con una incógnita, Inecuaciones de segundo grado	98
Progresiones, Definición, Progresión aritmética "P.A."	99
Progresión geométrica "P.G."	100
Logaritmos, Principales conceptos, Sistema de logaritmos	101
Propiedades de logaritmos, Cologaritmo, Antilogaritmo	102
Cambio de un sistema de logaritmos a otro, Logaritmos como progresiones	102
Sistema de logaritmos neperianos, Sistema de logaritmos decimales	103
Interés compuesto y anualidades, El interés compuesto	104
Anualidad de capitalización(Ac), Anualidad de amortización(Aa)	105
Geometría	106
Definición, Geometría plana, Ángulos, Teoremas básicos	106
Teoremas básicos, Teoremas auxiliares	106
Valor de los ángulos en la circunferencia	107
Distancia de un punto a una recta, Triángulos, Líneas principales del triángulo	108
Altura, Mediana	108
Mediatriz, Bisectriz	109
Igualdad de triángulos, Teoremas derivados de la igualdad de triángulos	110
Semejanza de triángulos, Teoremas derivados de la semejanza de triángulos	111
Teorema de Thales, Teorema de Menelao, Teorema de Ceva	111
Relaciones métricas en el triángulo rectángulo	112
Relaciones métricas en el triángulo oblicuángulo	112
Relación de lados con la mediana, Relación de lados de ángulos: 30°, 60°, 90°	113
Relación de lados con segmentos determinados por la bisectriz	114
Relación de lados con bisectriz	114
Relación de lados en desigualdad	115
Circunferencia, Posiciones relativas de dos circunferencias	115
Circunferencias ortogonales, Cuadrilátero inscrito a una circunferencias	116
Cuadrilátero circunscrito a una circunferencia, Propiedades de las tangentes	116
Teoremas fundamentales en la circunferencia	117
Líneas proporcionales en el círculo	117
Potencia de un punto, Lugar geométrico, Eje radical	118

Posiciones del eje radical, Propiedades del eje radical	119
Centro radical, Mediana y extrema razón de un segmento o sección aúrea	119
División armónica de un segmento, Haz armónico	120
Polígonos, Definición y conceptos	120
Cálculo de los elementos de los polígonos irregulares	121
Valor de los elementos de los polígonos regulares	121
Conclusiones sobre los polígonos regulares	123
Área de las regiones planas, Región	124
Relaciones de áreas de triángulos, Propiedades de los cuadriláteros	125
Teorema de Euler, Teorema de Ptolomeo(1), Teorema de Ptolomeo(2)	125
Semejanza de polígonos, Áreas de las regiones curvas	126
Geometría del espacio, Teoremas fundamentales, Ángulo triedro, Poliedros	127
Teorema de Euler, Poliedro regular	128
Prisma, Prisma regular, Cálculo de los elementos de los poliedros	129
Tronco de prisma, Pirámide, Pirámide regular	130
Pirámide irregular, Semejanza de pirámides, Tronco de pirámide	131
El cono, Definiciones, Cono de revolución	132
Cono oblicuo, Semejanza de conos, Tronco de cono	132
El cilindro, Cilindro recto, Cilindro oblicuo, Tronco de cilindro	134
La esfera, Superficie y volumen de la esfera, Partes de área de esfera	135
Partes de volúmenes de una esfera, Segmento esférico, Cuña esférica	136
Sector esférico, Anillo esférico	137
Sólidos de revolución, Teorema de Guldin Pappus (Áreas)	138
Teorema de Guldin Pappus (volumen)	138
Leyenda general	139
Trigonometría	140
Definición, Medida de ángulos, Sistemas de medición de ángulos	140
Sexagesimal, Centesimal, Radial, Equivalencia entre los tres sistemas	140
Longitud de un arco	140
Funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo, Funciones básicas	140
Tabla de valores de funciones trigonométricas de triángulos notables	141
Ángulos directrices	142
Signo de las funciones trigonométricas según el cuadrante	143
Variación de las funciones trigonométricas según el cuadrante	144
Intervalo de las funciones trigonométricas	144
Dominio y rango de las funciones trigonométricas	144
Relación de funciones trigonométricas en términos de una sola	145
Arcos compuestos, Funciones de la suma y diferencia de arcos	146

Funciones de la suma de tres arcos	146
Funciones de arcos dobles, Funciones de arco mitad, Funciones de arcos triples	147
Funciones auxiliares, Transformación a producto	147
Limites trigonométricos, Funciones trigonométricas inversas	148
Dominio y rango de las funciones inversas	149
Ecuaciones trigonométricas, Solución de las ecuaciones	150
Resolución de triángulos, Triángulos oblicuángulos	150
Cálculo de ángulos (fórmula de Briggs), Cálculo de superficies	151
Elementos secundarios en la solución de triángulos, Radios	152
Radios circunscritos, Radio inscrito o inradio, Radio ex-inscrito	152
Cevianas, Altura, Mediana, Bisectriz interior	153
Bisectriz exterior, Cuadriláteros convexos, Superficies	154
Cuadrilátero inscrito o cíclico	154
Cuadrilátero circunscrito, Polígonos regulares	155
Problema de Pothot-Snellius	155
Física	156
Definiciones, Ecuaciones dimensionales, Sistema de unidades	156
Unidades del sistema absoluto	156
Unidades del sistema técnico gravitacional o práctico	156
Unidades del sistema internacional de medida "SI", Unidades suplementarias	157
Unidades derivadas	157
Convenciones básicas, Vectores, Magnitud, Representación gráfica de un vector	158
Suma y resta de vectores, Métodos geométricos	158
Método del paralelogramo	159
Métodos analíticos, Dirección de la resultante	160
Mecánica, Cinemática	161
Conceptos, Movimiento rectilíneo uniforme (M.R.U.)	162
Movimiento variado, Aceleración	162
Movimiento vertical, Movimiento compuesto, Movimiento parabólico	163
Movimiento circunferencial uniforme (M.C.U.)	164
Velocidad o rapidez angular y período	164
Movimiento circunferencial uniformemente variado (M.C.U.V.)	165
Estática, Fuerza, Resultantes de un sistema de fuerzas	165
Condiciones de equilibrio en un cuerpo, Teorema de Lamy	167
Diagrama de cuerpo libre (D.C.L) o diagrama libre	168
Descomposición de fuerzas en sus componentes rectangulares	168
Máquinas simples, Tipo palanca	169
Tipo plano inclinado	171

Dinámica, Principales conceptos	172
Segunda ley de Newton, Unidades de fuerza	173
Rozamiento, fuerza de rozamiento o fricción	174
Dinámica de rotación o rotación dinámica	174
Momentos de inercia de algunos sólidos	175
Centro de gravedad, Teorema de Varignon	176
Posición del centro de gravedad, Centros de gravedad de figuras geométricas	177
Trabajo, Potencia y Energía. Trabajo, Unidades de trabajo,	180
Equivalencias de unidades de trabajo, Potencia, Unidades de potencia, Energía	180
Energía potencial (E_p), Energía cinética (E_c)	181
Trabajo transformado o energía transformada, Trabajo en las rotaciones	181
Energía cinética de rotación, Impulso y cantidad de movimiento	182
El movimiento oscilatorio y el péndulo, Péndulo simple	182
Elementos de un péndulo simple, Leyes del péndulo	182
Péndulo que bate segundos, Fórmula general del péndulo	183
Movimiento armónico simple o movimiento vibratorio armónico	183
Resortes, Fuerzas deformadora: Ley de Hooke	184
Velocidad, Aceleración, Período y frecuencia	184
Cálculo de la velocidad "V", Cálculo de la aceleración	184
Velocidad y aceleración máximas, Período y frecuencia	184
Densidad y peso específico, Relación entre densidad y peso específico	185
Estática de los fluidos, Conceptos y definiciones, Presión	185
Principio de Pascal, Prensa hidráulica	185
Principio de la hidrostática, Presión hidrostática	186
Ley fundamental de la hidrostática, Principio de Arquímedes	186
Relación entre el empuje y el peso específico de líquidos, Neumología	187
El calor, Dilatación	187
Calorimetría, Unidades para medir el calor, Calor específico "Ce"	188
Calor sensible "Q" (calor ganado o perdido)	189
Teorema fundamental de la calorimetría, Capacidad calorífica "Cc"	189
Temperatura de equilibrio de una mezcla, Temperatura final "tf"	189
Cambios de fase, Calores latentes, Transmisión de calor	189
Transmisión del calor por conducción, Cantidad de calor transmitido "Q"	190
Trabajo mecánico del calor	190
Termodinámica, Trabajo realizado por un gas "W"	190
Calor absorbido por un gas "G", Primera ley de la termodinámica	191
Segunda ley de la termodinámica (Rudolf Clausius 1850)	191
Electrostática, Primera ley de la electrostática	191
Tabla triboeléctrica, Segunda ley de la electrostática: Ley de Coulomb	191
Primitividad, Unidades eléctricas coulomb "C"	192
Campo eléctrico, Campo de cargas iguales	193

Campo de cargas distintas, Intensidad del campo eléctrico	193
Potencial eléctrico, Diferencia de potencial	194
Trabajo eléctrico, Capacidad eléctrica	195
Capacidad de los conductores aislados	195
Capacidad de una esfera aislada, Condensadores	196
Capacidad de un condensador, Capacidad de un condensador plano	196
Capacidad de condensador esférico y cilíndrico, Asociación de condensadores	197
Energía de un condensador, Electrodinámica	198
Corriente eléctrica, Partes de un circuito eléctrico	198
Resistencia de los conductores, Ley de Pouillet, Conductancia	199
Asociación de resistencias, En serie	199
En paralelo, Fuerza electromotriz y resistencia total en un circuito	200
Corrientes derivadas, Ley de Kirchoff, Puente de Wheatstone	200
Energía y potencia de la corriente eléctrica, Potencia de la corriente eléctrica	201
Efecto Joule o ley de Joule, Rendimiento de la corriente eléctrica	202
Magnetismo y electromagnetismo, Magnetismo	202
Líneas de fuerza de un campo magnético, Leyes magnéticas	202
Intensidad "B" de un punto del campo magnético	203
Intensidad de campo magnético producida por un polo, Flujo magnético	203
Densidad magnética "B", Electromagnetismo	204
Efecto Oersted, Regla de la mano derecha (de Ampere), Ley de Biot y Savart	204
Intensidad de campo creada por un conductor circular	204
Ley de la circulación de Ampere	205
Bobina, Solenoide anular o toroidal de Rowland	205
Densidad del flujo inducido "B" a través del núcleo, Efecto Faraday	206
Ley de Faraday, Óptica, Velocidad de la luz	207
Unidad de intensidad de la luz, Iluminación, Unidad de iluminación "E"	207
Flujo luminoso "f", Intensidad luminosa "I", Flujo de intensidad "f _T "	208
Reflexión de la luz	208
Leyes de la reflexión regular, Espejos, Espejos planos, Espejos esféricos	209
Elementos de un espejo esférico	209
Rayos principales, Posición del objeto y la imagen en un espejo cóncavo	210
Refracción de la luz, Índices de refracción, Leyes de la refracción	212
Ángulo límite y reflexión total "L"	212
Lámina de caras paralelas, Prisma óptico, Imágenes por refracción	213
Lentes, Elementos de las lentes	214
Rayos principales en las lentes convergentes y divergentes	214
Construcción y posición de imágenes de lentes convergentes	215
Fórmula de Descartes para las lentes, Construcción de la imagen de una lente divergente	215
Potencia de un lente, Aumento de la lente	215
Lentes gruesas de dos caras de cobertura, Potencia de lentes de contacto	216

Química 217

Definiciones, Química, Masa, Materia, Estados o fases de la materia	217
Cuerpo, Sustancia, Sistema, Fase, Energía	218
Unidades de medida, Unidades de longitud	218
Unidades de superficie, Unidades de volumen	218
Unidades de masa, Unidades de tiempo	219
Equivalencias de unidades SI e inglesas	219
Unidades de temperatura, Densidad y peso específico	220
Densidad absoluta o densidad, Densidad relativa	220
Peso específico, Gravedad específica, Densidad de la mezcla	221
Relación entre densidad y peso específico, Presiones, Presión	221
Presión hidrostática, Presión neumática o presión de gases	222
Teoría atómico molecular, Principales conceptos, Regla de Hund	223
Tendencia a la máxima simetría, Estructura particular del átomo	223
Croquis de un átomo, Núcleo, Isótopos, Isóbaros	224
Distribución electrónica de los elementos	224
Niveles de energía, Sub-niveles, Números cuánticos	224
Conceptos adicionales, Electronegatividad, Afinidad, Valencia, Kerne	225
Nomenclatura Lewis	225
Enlace iónico, Enlace covalente, Enlace covalente puro, Enlace covalente polar	226
Tabla periódica de los elementos	227
Grupos principales de la tabla, Nomenclatura	228
Nomenclatura química, Nombres de los átomos en su estado iónico	229
Aniones, Cationes	229
Nombre de los compuestos, Función química	230
Nombre de los anhídridos, Nombre de los óxidos, Nombre de los peróxidos	231
Nombre de los ácidos, Ácidos hidráticos	231
Ácidos oxácidos, Ácidos especiales	232
Radicales halogénicos, Radical halogénico hidrácido	234
Radical halogénico oxácido, Nombre de la base o hidrácidos	234
Nombre de las sales, Sales hidráticas, Sales oxácidas	235
Sales dobles, Peculiaridades de los ácidos del fósforo	236
Óxidos dobles, Radicales cationes compuestos	236
Anfoterismo del cromo, nitrógeno y manganeso	237
Unidades químicas de medida, Átomo-Gramo y Molécula-Gramo	238
Átomo, Molécula, Átomo-Gramo, Molécula- Gramo o Mol, El estado gaseoso, Gas	238
Ley general de los gases, Ley de Boyle y Mariotte, Ley de Charles, Ley de Gay-Lusasac	239

Densidad de un gas, Ley de difusión o ley de Graham, Ecuación universal de los gases	240
Hipótesis de Avogrado y Ampere, Mezcla de gases, Leyes de Dalton	241
Ley de Amagat, Fracción molar, Gases húmedos, Gas húmedo	242
Humedad relativa, Determinación de pesos atómicos, Método del calor específico	243
Ley de la combinación equivalente de los elementos	244
Leyes de las combinaciones químicas, Leyes ponderales, Leyes volumétricas	244
El estado líquido, Soluciones, Formas de expresar la concentración, Formas físicas	245
Equivalente-gramo(Eq-g)de compuestos, Mili-valente	246
Formas químicas para medir la concentración de las soluciones, Molaridad	246
Molaridad, Normalidad, Dilución y aumento de la concentración	247
Determinación de pesos moleculares, Método gasométrico, Método osmótico	248
Método ebulloscópico, Método crioscópico, Termoquímica, Definición y conceptos	249
Ley de Hess, Definición de las unidades calorimétricas, Caloría	250
Equilibrio químico, Reacciones reversibles	250
Reacciones irreversibles, Ácidos y bases, Ácidos	251
Bases, Constante de ionización del agua(Kw), Tipo de soluciones, Concepto de "pH"	252
Electro-química, Unidad de masa, Coulomb, Faraday, Electro-equivalente	253
Unidades de intensidad, Ampere, Electrólisis, Leyes de Faraday	253
Química orgánica, Breves nociones y nomenclatura	254
División de la química orgánica, Serie acíclica, Funciones químicas	255
Función hidrocarburo, Funciones principales, Serie saturada o Alkana	256
Serie no saturada	257
Funciones fundamentales, Función alcohol	258
Función aldehído, Función cetona	259
Función ácido	260
Radicales orgánicos	261
Funciones especiales, Función éter, Función éster, Función sal orgánica	262
Función amina, Función amida	263
Función nitrilo, Función cianuro	264
Cuadro de los grupos funcionales	265
Serie cíclica, Serie alicíclica, Serie heterocíclica, Benceno	267
Radical fenilo, Derivados del benceno	268
Naftaleno	269
Radical naftil, Derivados del naftaleno	269
Antraceno, Radical antracil	270
Derivados del antraceno	271

ARITMÉTICA

DEFINICIÓN

Es aquella parte de la matemática pura elemental que se ocupa de la composición y descomposición de la cantidad expresada en números.

Lógica Matemática

DEFINICIÓN

La lógica es la ciencia que estudia los procedimientos para distinguir si un razonamiento es correcto o incorrecto; en este sentido, la LÓGICA MATEMÁTICA analiza los tipos de razonamiento utilizando modelos matemáticos con ayuda de las PROPOSICIONES LÓGICAS.

PROPOSICIONES LÓGICAS

Una proposición lógica es el conjunto de palabras que, encerrando un pensamiento, tiene sentido al AFIRMAR que es VERDADERO o al AFIRMAR que es falso.

Las proposiciones se clasifican en:

- 1) Simples o Atómicas
- 2) Compuestas o Moleculares

CONECTIVOS LÓGICOS

Los conectivos lógicos son símbolos que sirven para relacionar o juntar proposiciones simples (atómicas) y formar proposiciones compuestas (moleculares).

CONECTIVO	NOMBRE	EL LENGUAJE COMÚN SE LEE
\sim	Negación	no, n es cierto que, no es el caso que, etc.
\wedge ó \bullet	Conjunción	y, pero, sin embargo, además, aunque, etc.
\vee	Disyunción inclusiva	o, y/o

CONECTIVO	NOMBRE	EL LENGUAJE COMÚN SE LEE
Δ	Disyunción exclusiva	o ... o...
\Rightarrow	Condiciona	entonces, si ... entonces ..., dado que siempre que ..., en vista que ..., implica ..., etc.
\Leftrightarrow	Bicondicional	... si y sólo si ...



PROPOSICIONES SIMPLES

Las proposiciones simples o atómicas se representan por las letras p, q, r, s, t, etc. y pueden ser verdaderas o falsas.

Ejemplos:

- p: Juan Estudia
- q: Andrés es un niño
- r: Stéfano no juega fútbol
- s: Alejandra está gordita
- t: Christian es rubio
- u: Alescia habla mucho

TABLAS DE VERDAD DE LAS PROPOSICIONES COMPUESTAS BÁSICAS

NEGACIÓN

p	$\sim q$
V	F
F	V

CONJUNCIÓN

p q	$p \wedge q$
V V	V
V F	F
F V	F
F F	F

DISYUNCIÓN INCLUSIVA

p q	$p \vee q$
V V	V
V F	V
F V	V
F F	F

DISYUNCIÓN EXCLUSIVA

p q	$p \Delta q$
V V	F
V F	V
F V	V
F F	F

PROPOSICIONES COMPUESTAS BÁSICAS

Son las siguientes, formadas a partir de proposiciones simples:

Negación: $\sim p$ Se lee: "no p", "no es cierto que p", etc.

Conjunción: $p \wedge q$ Se lee: "p y q", "p pero q", "p sin embargo q", etc.

Disyunción: $p \vee q$ Se lee: "p o q", "p y/o q"

Disyunción Exclusiva: $p \Delta q$ Se lee: "o p o q"

Condicional: $p \Rightarrow q$ Se lee: "si p, entonces q", "p implica q", etc.

Bicondicional $p \Leftrightarrow q$ Se lee: "p si, y sólo si q"

CONDICIONAL

p q	$p \Rightarrow q$
V V	V
V F	F
F V	V
F F	V

BICONDICIONAL

p q	$p \Leftrightarrow q$
V V	V
V F	F
F V	F
F F	V

TIPOS DE PROPOSICIONES

TAUTOLOGÍA

Es una proposición cuyos VALORES DE VERDAD del OPERADOR PRINCIPAL son TODOS VERDADEROS, cualquiera sea el valor de verdad de sus componentes.

Ejemplo:

p q	$p \wedge q$	\Rightarrow	$(p \vee q)$
V V	V	V	V
V F	F	V	V
F V	F	V	V
F F	F	V	F

CONTRADICCIÓN

Es una proposición cuyos VALORES DE VERDAD del OPERADOR PRINCIPAL son TODOS FALSOS, cualquiera que sea el valor de verdad de sus componentes.

Ejemplo:

p q	$[\sim p \Rightarrow (q \wedge \sim q)] \wedge \sim p$						
VV	F	V	V	F	F	F	F
VF	F	V	F	F	V	F	F
FV	V	F	V	F	F	F	V
FF	V	F	F	F	V	F	V

CONTINGENCIA

No es ni tautología ni contradicción porque los VALORES DE VERDAD de su OPERADOR PRINCIPAL tienen por lo menos una VERDAD y/o una FALSEDADE.

LEYES LÓGICAS PRINCIPALES

1. DE IDENTIDAD:

$$p \Rightarrow p$$

$$p \Leftrightarrow p$$

“Una proposición sólo es idéntica consigo misma”.

2. DE CONTRADICCIÓN:

$$\sim (p \wedge \sim p)$$

“Una proposición no puede ser verdadera y falsa a la vez”.

3. DEL TERCIO EXCLUÍDO:

$$p \vee \sim p$$

“Una proposición o es verdadera o es falsa, no hay una tercera opción”.

4. DE LA DOBLE NEGACIÓN (INVOLUCIÓN):

$$\sim (\sim p) \equiv p$$

“La negación de la negación es una afirmación”.

5. DE LA IDEMPOTENCIA:

$$a) p \wedge p \wedge p \wedge \dots \wedge p \equiv p$$

$$b) p \vee p \vee p \vee \dots \vee p \equiv p$$

“Las variables repetidas redundantemente en una cadena de conjunciones o en una cadena de disyunciones se reemplazan por la sola variable”.

6. DE LA CONMUTATIVIDAD:

$$a) p \wedge q \equiv q \wedge p$$

$$b) p \vee q \equiv q \vee p$$

$$c) p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p$$

“En una proposición, la conjunción, la disyunción inclusiva y la bicondicional son conmutativas”.

7. DE LA ASOCIATIVIDAD:

$$a) p \wedge (q \wedge s) \equiv (p \wedge q) \wedge s$$

$$b) p \vee (q \vee s) \equiv (p \vee q) \vee s$$

$$c) p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow s) \equiv (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow s$$

“En una proposición, la doble conjunción, la doble disyunción, o la doble bicondicional se asocian indistintamente”.

8. DE LA DISTRIBUTIVIDAD:

$$a) p \wedge (q \vee s) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge s)$$

$$b) p \vee (q \wedge s) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee s)$$

$$c) p \Rightarrow (q \wedge s) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow s)$$

$$d) p \Rightarrow (q \vee s) \equiv (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow s)$$

“En una proposición la conjunción, la disyunción y la implicación son distributivas”.

9. DE DE MORGAN:

$$a) \sim (p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$$

$$b) \sim (p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$$

“En una proposición, la negación de una conjunción o de una disyunción son distributivas respecto a la disyunción o conjunción”.



10. DEL CONDICIONAL:

$$a) p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

$$b) \sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

“En una proposición, la condicional equivale a la disyunción de la negación del antecedente con el consecuente, y la negación de una condicional equivale a una conjunción del antecedente con la negación del consecuente”.

11. DEL BICONDICIONAL:

$$a) (p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

$$b) (p \Leftrightarrow q) \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \equiv \sim(p \Delta q)$$

12. DE LA ABSORCIÓN:

$$a) p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

$$b) p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$$

$$c) p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

$$d) p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$$

13. DE TRANSPOSICIÓN:

$$a) (p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

$$b) (p \Leftrightarrow q) \equiv (\sim p \Leftrightarrow \sim q)$$

14. DE EXPORTACIÓN:

$$a) (p \wedge q) \Rightarrow s \equiv p \Rightarrow (q \Rightarrow s)$$

$$b) (p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \Rightarrow s \\ \equiv (p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_{n-1}) \Rightarrow (p_n \Rightarrow s)$$

15. MODUS PONENS:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$$

“En una premisa condicional; si se afirma el antecedente, entonces se concluye en la afirmación del consecuente”.

16. MODUS TOLLENS:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge \sim p] \Rightarrow \sim q$$

“En una proposición, si se niega el consecuente de una premisa condicional entonces se concluye en la negación del antecedente”.

17. DEL SILOGISMO DISYUNTIVO:

$$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$$

“En una proposición, cuando se niega el antecedente de la premisa de una disyunción, se concluye en la afirmación del consecuente”.

18. DE LA INFERENCIA EQUIVALENTE:

$$[(p \Leftrightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$$

“En una proposición, cuando se afirma que uno de los miembros de una bicondicional es verdadera, entonces el otro miembro también es verdadero”.

19. DEL SILOGISMO HIPOTÉTICO:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow s)] \Rightarrow (p \Rightarrow s)$$

“En una proposición, el condicional es transitivo”.

20. DE LA TRANSITIVIDAD SIMÉTRICA:

$$[(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow s)] \Rightarrow (p \Leftrightarrow s)$$

“En una proposición, el bicondicional es transitivo”.

21. DE LA SIMPLIFICACIÓN:

$$(p \wedge q) \Rightarrow p$$

“En una proposición, si el antecedente y consecuente de una conjunción son verdades, entonces cualquiera de los dos términos es verdad”.

22. DE ADICIÓN:

$$p \Rightarrow (p \vee q)$$

“En una proposición, una disyunción está implicada por cualquiera de sus dos miembros”.

TEORÍA DE CONJUNTOS

CONCEPTOS BÁSICOS

DEFINICIÓN DE CONJUNTO

Se entiende por conjunto a la colección, agrupación o reunión de un todo único de objetos definidos, distingüeles por nuestra percepción o nuestro pensamiento y a los cuales se les llama **elementos**. Ejemplo: los muebles de una casa. Los muebles son los elementos que forma el conjunto.

FORMAS DE EXPRESAR UN CONJUNTO

a) Por extensión.- Cuando el conjunto indica explícitamente los elementos del conjunto. También se llama forma constructiva.

Ejemplos:

i) $A = \{a, b, c, d\}$

ii) $\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; -0; 1; 2; \dots\}$

b) Por comprensión.- Cuando los elementos del conjunto pueden expresarse por una propiedad común a todos ellos. También se le llama forma simbólica.

Ejemplos:

i) $M = \{x/x = \text{vocal}\}$

Se lee:

“M es el conjunto de las x, donde x es una vocal”.

ii) $B = \{x \in \mathbb{Z} / -2 < x < 3\}$

Se lee:

“B es el conjunto de las x que pertenecen a los números enteros, donde x es mayor que -2 pero menor que 3”.



PRINCIPALES SÍMBOLOS

Símbolo	Lectura	Símbolo	Lectura
\in	... pertenece...	\exists	... existe...
\notin	... no pertenece...	$\exists!$	existe un ... sólo un ...
\emptyset	Conjunto vacío	\nexists	no existe
\equiv	... equivalente...	η	cardinal de...
\neq	... diferente...	\Rightarrow	implica; entonces...
\subset	... está incluido	\Leftrightarrow	... si y sólo si...
\subseteq	... está incluido estrictamente	\mathcal{P}	conjunto de partes de...
$\not\subset$... no está incluido...	P	potencial del ...
\cup	... unión...	\wedge	... y ...
\cap	... intersección...	\vee	... o ...
$/$... tal que ...	Δ	o ... o ...
\sim	... es coordinable...	A'	Complemento de A con Respecto al conjunto Universal \cup
$\not\sim$... no es coordinable...	$<$... es menor que ...
\cup	Conjunto Universal	$>$... es mayor que ...
Δ	... diferencia simétrica...	\leq	... es menor o igual que ...
\forall	Para todo	\geq	... es mayor o igual que ...



NOTACIÓN DE LOS CONJUNTOS NUMÉRICOS

\mathbb{N} : Conjunto de los números naturales

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$$

\mathbb{Z} : Conjunto de los números entero

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$$

\mathbb{Z}^+ : Conjunto de los números enteros positivos

\mathbb{Z}^- : Conjunto de los números enteros negativos

\mathbb{Z}^* : Conjunto de los números enteros no nulos

\mathbb{Q} : Conjunto de los números racionales (decimales finitos o infinitos periódicos)

$$\mathbb{Q} = \left\{ x/x = \frac{a}{b} ; a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0 \right\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \dots; \frac{5}{8}; \frac{7}{2}; -8; +3; -\frac{6}{5}; \dots \right\}$$

\mathbb{I} : Conjunto de números irracionales (decimales infinitos no periódicos)

$$\mathbb{I} = \mathbb{Q}' = \{x/x \text{ es número no racional}\}$$

$$\mathbb{I} = \{\dots; \sqrt{30}; \sqrt{2}; \sqrt{3}; +e; \pi; \dots\}$$

\mathbb{R} : Conjunto de los números reales

$$\mathbb{R} = \{x/x \in \mathbb{Q} \vee x \in \mathbb{I}\}$$

$$\mathbb{R} = \left\{ \dots; \frac{8}{3}; -\frac{4}{13}; \sqrt{5}; 3; -\sqrt{\frac{5}{4}}; \dots \right\}$$

\mathbb{C} : Conjunto de los números complejos

$$\mathbb{C} = \{\mathbb{R} \wedge \sim \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{C} = \{\dots; -8; \sqrt{7}; 3; 5i; i\sqrt{3}; -\frac{5}{9}; \dots\}$$

Ingresar a la U ingresa a
www.elpostulante.net

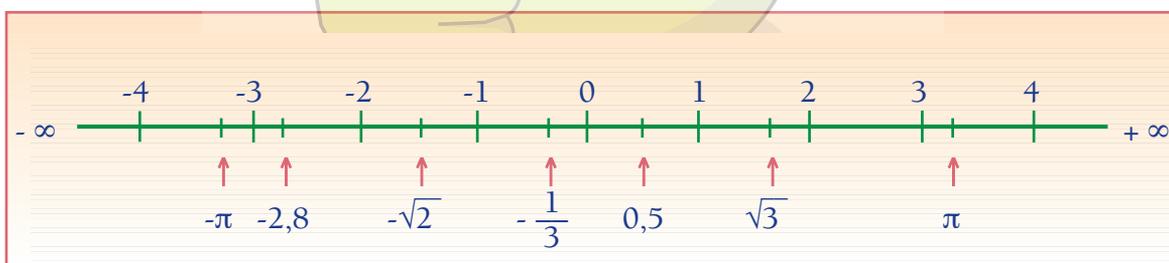
LA RECTA REAL

El conjunto de los números reales está formado por todos los conjuntos numéricos. Todos los números:

Naturales, Enteros, Racionales e Irracionales se pueden representar sobre una recta, desde el cero a $+\infty$

y desde cero a $-\infty$. A esta recta se le llama "Recta real" o "Recta numérica".

Cualquier número real se puede representar sobre un punto de la Recta Real, porque tiene infinitos puntos.



CARACTERÍSTICAS DE LOS CONJUNTOS

1) PERTENENCIA \in Y NO PERTENENCIA \notin

Sea : $A = \{a, b, c, d, e\}$

: $B = \{a, b, c\}$

: $C = \{m, n, q, r, s\}$

Entonces: $B \in A$, se lee:

“B pertenece a A”

$C \notin A$, se lee:

“C no pertenece a A”

2) CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS

Finitos:

Cuando los elementos del conjunto se puede contar.

$A = \{m, n, q, r\}$;

Son 4 elementos.

Infinitos:

Cuando los elementos del conjunto son tantos que no se puede contar.

$M = \{\text{estrellas del firmamento}\}$; son infinitas

$N = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; \dots; \infty\}$; Infinitos números

3) CONJUNTOS IGUALES

Dos conjuntos son iguales cuando tienen exactamente los mismos elementos aunque no estén en el mismo orden.

$A = \{4; 5; 6; 7; 8\}$

$B = \{5; 6; 4; 8; 7\}$

Entonces: $A = B$

4) CONJUNTO VACÍO

Es el conjunto que carece de elementos.

$A = \phi$; $A = \{ \}$; $A = 0$

5) CONJUNTO UNITARIO

Es el conjunto que tiene un solo elemento.

$M = \{3\}$; $Q = \{0\}$

$X = \{y/2y = 4\}$

6) CONJUNTO UNIVERSAL

Es el conjunto que contiene a todos los elementos de otro conjunto.

$U = \{\text{todas las vocales}\}$

$A = \{e; i; o\}$

Entonces U es el conjunto universal de A.

7) SUBCONJUNTO

$A = \{m; n; p\}$

$B = \{q; m; n; r; p\}$

Se lee “A es subconjunto de B” o “A está incluido en B”.

RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

CONJUNTO DE CONJUNTO O CONJUNTO DE PARTES

Es el conjunto formado por la totalidad de subconjuntos que se puede formar a partir de un conjunto dado.

Sea el conjunto:

$M = \{m; n; p\}$

El conjunto de partes es:

$\mathcal{S}(M) = \{\phi, \{m\}, \{n\}, \{p\}, \{m, n\}, \{m, p\}, \{n, p\}, \{m, n, p\}\}$

POTENCIA DE UN CONJUNTO

Expresa el número de subconjuntos que se puede formar con los elementos de un conjunto. En otras palabras, es el número de elementos de un conjunto de partes.

$P(M) = 2^n$

$N =$ número de elementos del conjunto M.

Para el ejemplo anterior:

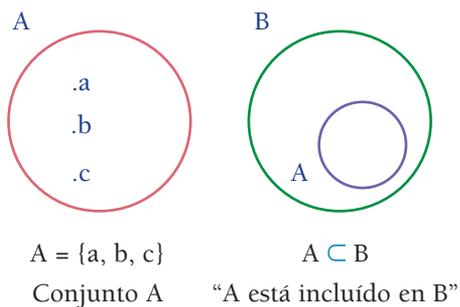
$n = 3$, luego:

$P(M) = 2^3 = 8$



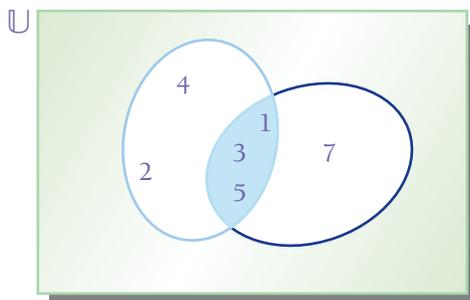
DIAGRAMAS DE VENN

Son gráficos, generalmente círculos, que sirven para encerrar y representar conjuntos:



Sean: $A = \{ 1; 2; 3; 4; 5 \}$

$B = \{ 1; 3; 5; 7 \}$



$$A \cap B = \{ 1; 3; 5 \}$$

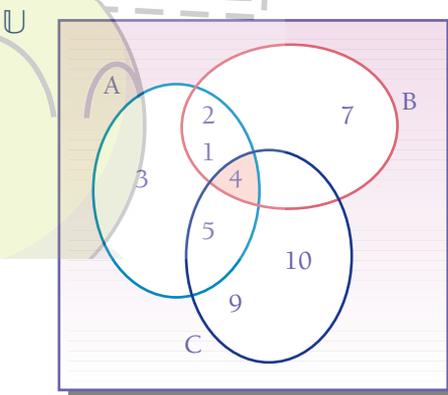
Se lee: "A intersección B".

La intersección de varios conjuntos:

Sean: $A = \{ 1; 2; 3; 4; 5 \}$

$B = \{ -1; 2; 4; 7 \}$

$C = \{ 4; 5; 9; 10 \}$



$$A \cap B \cap C = \{ 4 \}$$

Se lee "A intersección B intersección C".



$A \not\subset B$
"A no está incluido en B"

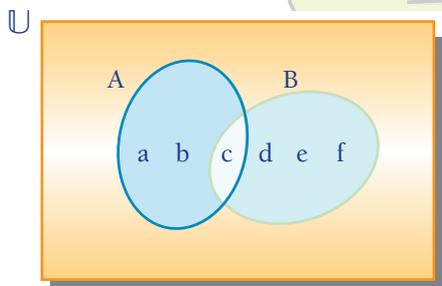
OPERACIONES CON CONJUNTOS

1) UNIÓN DE CONJUNTOS

La unión de dos conjuntos A y B, es el conjunto formado por todos los elementos de los conjuntos A y B.

Sean: $A = \{ a, b, c \}$

$B = \{ c, d, e, f \}$



$$A \cup B = \{ a, b, c, d, e, f \}$$

Se lee: "A unión B".

2) INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

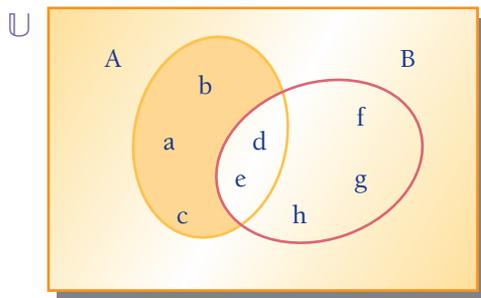
La intersección de los conjuntos A y B, es el conjunto que contiene elementos comunes a los conjuntos A y B.

3) DIFERENCIA DE CONJUNTOS

La diferencia de dos conjuntos, A menos B, es el conjunto formado por elementos de A que no pertenezcan a B.

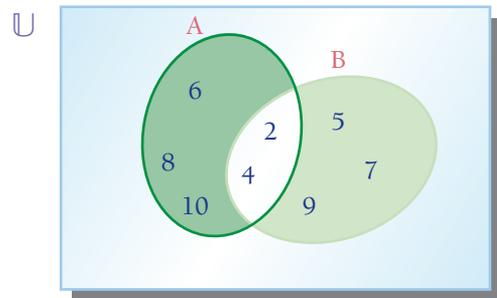
Sean: $A = \{ a, b, c, d, e \}$

$B = \{ d, e, f, g, h \}$



$$A - B = \{ a, b, c \}$$

Se lee: "El conjunto A menos el conjunto B, es el conjunto a, b, c".



$$A \Delta B = \{ 5; 6; 7; 8; 9; 10 \}$$

Se lee: "A diferencia simétrica B"

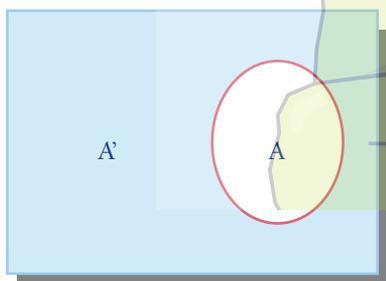
4) COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO

Sean los conjuntos A y universal \mathbb{U} . El complemento del conjunto A es la parte del conjunto universal \mathbb{U} que no pertenece al conjunto A.

Sean:

$$A = \{ \text{vocales} \}$$

$$\mathbb{U} = \{ \text{el alfabeto} \}$$



$$A' = \mathbb{U} - A = \{ \text{las consonantes} \}$$

Se lee: "A' es el complemento de A".

5) DIFERENCIA SIMÉTRICA

Es el conjunto formado por la parte no común de dos conjuntos.

$$A = \{ 2; 4; 6; 8; 10 \}$$

$$B = \{ 2; 4; 5; 7; 9 \}$$

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

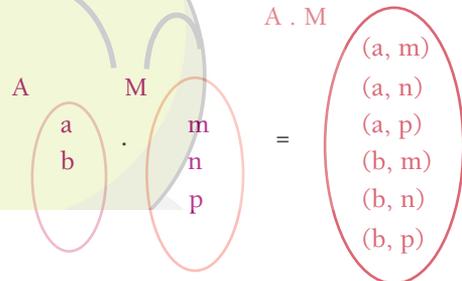
PRODUCTO CARTESIANO DE DOS CONJUNTOS

Dados dos conjuntos A y B, se llama producto cartesiano $A \cdot B$, al conjunto de "pares ordenados" formados por todos los elementos de A, como primeros componentes, asociados a todos los elementos de B como segundos elementos.

Sean:

$$A = \{ a, b \}$$

$$M = \{ m, n, p \}$$



$$A \cdot M = \{ (a, m), (a, n), (a, p),$$

$$(b, m), (b, n), (b, p) \}$$

Simbólicamente:

$$A \cdot M = \{ (x, y) / x \in A \wedge y \in M \}$$

Nota: $A \cdot M \neq M \cdot A$ (no es conmutativo)

RELACIONES

DEFINICIÓN

Relación es un subconjunto de pares ordenados de dos conjuntos A y B que obedecen a una proposición establecida.



Ejemplo:

Sean los conjuntos:

$$A = \{ a, b \}$$

$$M = \{ m, n, p \}$$

Se denota:

$$a \mathfrak{R} m \text{ ó } (a, m) \in \mathfrak{R}$$

y se lee:

“ a está relacionada con m por \mathfrak{R} ”.

Simbólicamente:

$$\mathfrak{R} \text{ es una relación de } A \text{ en } M \Leftrightarrow \mathfrak{R} \subset A \cdot M$$

y se lee:

“ \mathfrak{R} es una relación de A en M, si y solamente si la relación \mathfrak{R} es un subconjunto de $A \cdot M$ ”.

Ejemplo: $A = \{ 2; 4; 6; 8; 10 \}$

$$B = \{ 1; 2; 3; 4 \}$$

Sea la propiedad: $x \in A \wedge y \in B$

Que obedezca a la proposición $P(x): x < y$
entonces:

$$2 \mathfrak{R} 3$$

$$2 \mathfrak{R} 4$$

Sólo se puede escribir estas dos relaciones porque son las únicas que cumplen que $x < y$, que es la proposición $P(x)$ que los relaciona.

DOMINIO Y RANGO

DOMINIO

Es el conjunto formado por los primeros componentes de los pares ordenados que forman la relación \mathfrak{R} .

Se denota: $\text{Dom} (\mathfrak{R})$

En el ejemplo anterior:

$$\text{Dom} (\mathfrak{R}) = \{ 2 \}$$

RANGO

Es el conjunto formado por los segundos componentes de los pares ordenados que forman la relación \mathfrak{R} .

Se denota: $\text{Ran} (\mathfrak{R})$

En el ejemplo anterior:

$$\text{Ran} (\mathfrak{R}) = \{ 3; 4 \}$$

TIPOS DE RELACIONES EN UN CONJUNTO

1) REFLEXIVA

Cuando todos los elementos de un conjunto A están relacionados consigo mismos a través de \mathfrak{R} .

$$\mathfrak{R} \text{ es reflexiva} \Leftrightarrow (a, a) \in \mathfrak{R} \forall a \in A$$

Ejemplo:

$$A = \{ a, b, c \}$$

Relación Reflexiva:

$$\mathfrak{R} = \{(a, a); (b, b); (c, c)\}$$

2) SIMÉTRICA

Cuando cada uno de los elementos de un conjunto A está relacionado con otro del mismo conjunto y éste a su vez está relacionado con el primero.

$$\mathfrak{R} \text{ es simétrica} \Leftrightarrow (a, b) \in \mathfrak{R} \Rightarrow (b, a) \in \mathfrak{R}$$

Ejemplo:

$$A = \{ a, b, c \}$$

Relación simétrica:

$$\mathfrak{R} = \{(a, b); (b, a); (a, c); (c, a); (b, c); (c, b)\}$$

3) TRANSITIVA

Cuando un elemento de un conjunto A está relacionado con otro elemento del mismo conjunto y éste a su vez está relacionado con uno tercero del mismo conjunto; entonces, el primero está relacionado con el tercero a través de la relación \mathfrak{R} .

$$\mathfrak{R} \text{ es transitiva} \Leftrightarrow (a, b) \in \mathfrak{R} \wedge (b, c) \in \mathfrak{R} \Rightarrow (a, c) \in \mathfrak{R}$$

Ejemplo:

$$A = \{ a, b, c \}$$

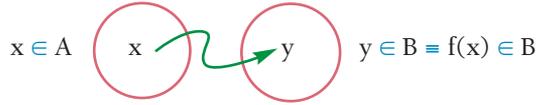
Relación Transitiva:

$$\mathfrak{R} = \{(a, b); (b, c); (a, c)\}$$

En general una función se denota así:

$$f(x) = y$$

Donde “x” es un elemento de A, e “y” es un elemento de B.



RELACIÓN DE EQUIVALENCIA

La relación \mathfrak{R} de A en A es una relación de EQUIVALENCIA, cuando esta relación es reflexiva, simétrica y transitiva a la vez.

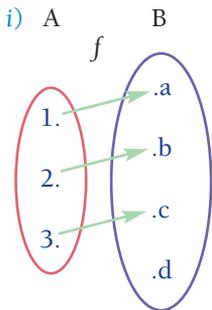
FUNCIONES

DEFINICIÓN

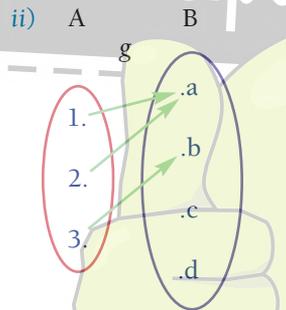
Una función de A en B es una relación de par ordenado que asocia a TODO ELEMENTO del conjunto A con UN SOLO ELEMENTO del conjunto B.

Se denota: $f: A \Rightarrow B$

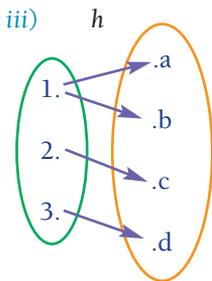
Ejemplos:



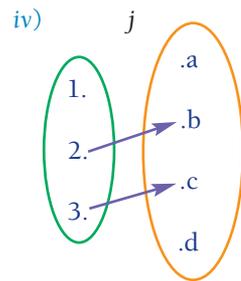
f es una función y se denota $f = \{(1,a), (2,b), (3,c)\}$



g es una función y se denota $g = \{(1,a), (2,a), (3,b)\}$



h No es una función porque No cumple: “a todo elemento de A le corresponde UN SOLO elemento de B”



j NO es una función porque No cumple: “a TODO elemento de A

DOMINIO Y RANGO

DOMINIO

Es el conjunto de todas las PRIMERAS componentes del par ordenado que pertenecen a una función “f”.

RANGO

Es el conjunto de todas las SEGUNDAS componentes del par ordenado que pertenecen a una función “f”.

Ejemplo:

Sea: $f = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$

$\text{Dom}(f) = \{1; 2; 3\}$

$\text{Ran}(f) = \{ a, b, c \}$

SISTEMAS DE NUMERACIÓN

NUMERACIÓN

DEFINICIÓN

Es la parte de la Aritmética que estudia las leyes, artificios y convencionalismos utilizados para expresar (hablar) y representar (escribir) a los números en forma sistemática y lo más simple posible.

SISTEMAS DE NUMERACIÓN

Se refiere a los conjuntos de reglas, leyes, artificios y convenios que permiten formar, expresar y representar todos los números.

BASE DE UN SISTEMA

Es aquel número que indica la cantidad de unidades de un orden cualquiera que se requiere para formar una unidad de un orden inmediato superior. Así,



nuestro sistema se llama DECIMAL porque con 10 UNIDADES de un orden cualquiera, se logra formar una unidad de un orden inmediato superior.

FORMACIÓN DE UN SISTEMA DE NUMERACIÓN

PRINCIPIO BÁSICO

En un sistema de base N, toda cifra escrita un lugar a la izquierda de otra, representa unidades de orden N veces mayor al orden que representa la otra, escrita a la derecha.

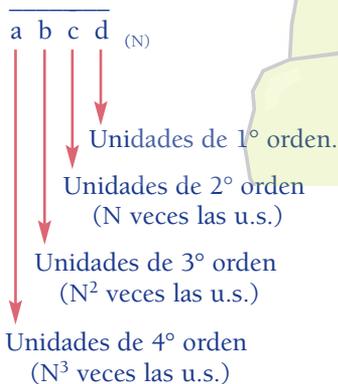
Ejemplo:

Sea el número 468 en base N = 10, el 4 es de orden 10 veces mayor que cada unidad de 60 y cada unidad de 6 es de orden 10 veces mayor que cada unidad de 8.

DESCOMPOSICIÓN POLINÓMICA DE UN NÚMERO

Es el procedimiento de cálculo que permite determinar la cantidad de unidades simples que posee un número y con ello su valor real.

Sea el número $\overline{abcd}_{(N)}$ de base N:



Donde: u.s. = unidades simples

MÉTODO PRÁCTICO PARA DESCOMPONER UN NÚMERO EN SU FORMA POLINÓMICA

“Se toma la primera cifra de la izquierda y se multiplica por la base del sistema elevado a un exponente igual al número de cifras que le siguen a la cifra tomada, a este resultado se le suma el producto de la segunda cifra multiplicada por la base del sistema

elevada a un exponente igual al número de cifras que le siguen y así sucesivamente”.

$$\overline{abc}_{(N)} \Rightarrow a \cdot N^2 + b \cdot N + c$$

$$\overline{abcde}_{(N)} \Rightarrow a \cdot N^4 + b \cdot N^3 + c \cdot N^2 + d \cdot N + e$$

$$\underbrace{\overline{ab\dots xyz}_{(N)}}_{\text{“m” cifras}} \Rightarrow a \cdot N^{m-1} + b \cdot N^{m-2} + \dots + x \cdot N^2 + y \cdot N + z$$

CONVENCIÓN

Cuando la base es superior a 10, y los números 10; 11; 12 y 13 sean cifras, se emplea la siguiente equivalencia:

$$\alpha = 10 ; \beta = 11 ; \gamma = 12 ; \& = 13$$

CIFRAS MÍNIMAS

Son todas las cifras menores o iguales a la mitad de la base del número dado.

Ejemplos de cifras mínimas:

De base 4: 0; 1; 2;

De base 7: 0; 1; 2; 3;

De base 10: 0; 1; 2; 3; 4; 5

De base 11: 0; 1; 2; 3; 4; 5

De base 12: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6

Ejemplo:

Escribir el número $67\ 654_{(8)}$ en cifras mínimas. Las cifras mínimas de este número son: 0; 1; 2; 3; 4.

$$4 = 4$$

$$5 - 8 = \overline{3}$$

$$6 + 1 = 7 \quad ; \quad 7 - 8 = \overline{1}$$

$$7 + 1 = 8 \quad ; \quad 8 - 8 = 0$$

$$6 + 1 = 7 \quad ; \quad 7 - 8 = \overline{1}$$

$$0 + 1 = 1$$

$$\therefore 67\ 654_{(8)} = \overline{1}\ \overline{1}\ 0\ \overline{1}\ 3\ 4$$

OPERACIONES ARITMÉTICAS BÁSICAS NO DECIMALES

SUMA

Tal como en el sistema decimal, si la suma parcial supera el valor de la base, se escribe el valor numérico de lo que excede a la base y se lleva como unidades tantas veces como excede al valor de la base.

Ejemplo:

$$423_{(7)} + 566_{(7)} + 2521_{(7)}$$

$$\begin{array}{r} 423 + \\ 566 \\ 2521 \\ \hline 4143_{(7)} \end{array}$$

lo cual se desarrolló de la siguiente manera:

$$3 + 6 + 1 = 10$$

como $10 = 7 + 3$; se pone 3 y se lleva 1.

$$1 + 2 + 6 + 2 = 11$$

como $11 = 7 + 4$; se pone 4, se lleva 1.

$$1 + 4 + 5 + 5 = 15$$

como $15 = 14 + 1$; $15 = 2 \cdot 7 + 1$; se pone 1, se lleva 2

$$2 + 2 = 4$$

RESTA

El método es similar a la resta en base 10. Cuando la base es otra, se añade como unidad el valor de la base.

Ejemplo: $4735_{(8)} - 2367_{(8)}$

$$\begin{array}{r} 4735 - \\ 2367_{(8)} \\ \hline 2346_{(8)} \end{array}$$

Desarrollo:

$5 - 7$ no se puede restar, entonces, en la segunda columna tomamos prestada 1 unidad a 3, lo que nos permite añadir a 5 el valor de la base:

$$(5 + 8) - 7 = 6$$

Como a 3 se quitó 1 unidad, ahora es 2, pero $2 - 6$ no se puede restar, entonces:

$$(2 + 8) - 6 = 4$$

Como a 7 se le había quitado 1 unidad, ahora es 6:

$$6 - 3 = 3$$

Ahora no se ha quitado nada.

Finalmente:

$$4 - 2 = 2$$

MULTIPLICACIÓN

El procedimiento es similar a la multiplicación en base 10; sólo que lo que se lleva es la unidad de la base de los factores.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 326_{(7)} \cdot 465_{(7)} \\ 326 \times \\ 465 \\ \hline 2302 \\ 2631 \\ 1643 \\ \hline 226212_{(7)} \end{array}$$

Desarrollo:

$$5 \cdot 6 = 30 = 4 \cdot 7 + 2$$

pongo 2 van 4

$$5 \cdot 2 + 4 = 14 = 2 \cdot 7 + 0$$

pongo 0 van 2

$$5 \cdot 3 + 2 = 17 = 2 \cdot 7 + 3$$

pongo 3 van 2

Finalmente:

pongo 2.

$$6 \cdot 6 = 36 = 5 \cdot 7 + 1$$

pongo 1 van 5

$$6 \cdot 2 + 5 = 17 = 2 \cdot 7 + 3$$

pongo 3 van 2

$$6 \cdot 3 + 2 = 20 = 2 \cdot 7 + 6$$

pongo 6 van 2

Finalmente:

pongo 2

$$4 \cdot 6 = 24 = 3 \cdot 7 + 3$$

pongo 3 van 3

$$4 \cdot 2 + 3 = 11 = 1 \cdot 7 + 4$$

pongo 4 van 1

$$4 \cdot 3 + 1 = 13 = 1 \cdot 7 + 6$$

pongo 6 van 1

Finalmente:

pongo 1



Luego, se suma los productos parciales, recordando cómo se suma cuando los sumandos no son de base 10.

DIVISIÓN

Para hacer la división es aconsejable formar una tabla con la base dada, con todos los productos posibles del divisor por el cociente.

Ejemplo: $4\ 350_{(6)} \div 24_{(6)}$

Las cifras del cociente, por ser de base 6, oscilan entre 0 y 5, lo cual se toma en cuenta para formar la tabla:

Tabla de base 6

0 . 24 =	0
1 . 24 =	24
2 . 24 =	52
3 . 24 =	120
4 . 24 =	144
5 . 24 =	212

4 3 5 0	<u>24</u>	
24	1 4 2 ₍₆₎	
<u>155</u>		
144		
<u>110</u>		
52		
<u>14</u>		

Se descompone polinómicamente y se suma:

$$3 \cdot 9^3 + 8 \cdot 9^2 + 5 \cdot 9 + 6 = 2\ 886 \text{ u. s.}$$

$$3\ 856_{(9)} = 2\ 886_{(10)} = 2\ 886$$

Nota.-

Que cuando el número es de base 10 no es necesario señalar la base.

2° UN NÚMERO DE BASE 10 PASAR A OTRO SISTEMA DE BASE "N"

Regla:

Se divide el número dado entre el valor "N" de la base deseada, lo cual arroja un cociente. Este cociente se divide nuevamente entre el valor "N", sucesivamente hasta obtener un último cociente cuyo valor sea menor a la base. Luego, tomando la cifra del último cociente y las cifras de los residuos en el orden del último al primero, queda formado el número de base "N".

Ejemplo:

Pasar 4 975 de base 10 a base 8.

4 975	<u>8</u>			
17	6 2 1	8		
15	6 1	7 7	8	
7	5	5	9	8
	1	1		

$$\therefore 4\ 975_{(10)} = 11\ 557_{(8)}$$

CAMBIOS DE BASE DE UN SISTEMA DE NUMERACIÓN

1° UN NÚMERO DE CUALQUIER BASE PASAR A BASE 10

Regla:

Se descompone polinómicamente el número dado. El número que resulta de sumar las unidades simples (u.s.) de este número es el número de base 10.

Ejemplo:

Pasar $3\ 856_{(9)}$ a base 10.

3° DE UN NÚMERO NO DECIMAL A OTRO NO DECIMAL

Regla:

El primero se pasa a base 10 y luego, el nuevo número, a la base pedida.

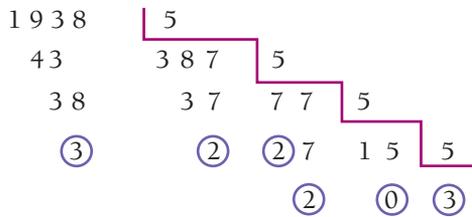
Ejemplo:

Pasar el número $2\ 583_{(9)}$ a base 5.

A base 10:

$$2 \cdot 9^3 + 5 \cdot 9^2 + 8 \cdot 9 + 3 = 1\ 938$$

Ahora, 1 938 se cambia a base 5:



$$\therefore 1\ 938_{(10)} = 30\ 223_{(5)}$$

CONTEO DE CIFRAS AL ESCRIBIR LA SERIE NATURAL

EN BASE 10

$$\# \text{ de cifras} = (\# \text{ mayor} + 1) (\# \text{ cifras del } \# \text{ mayor}) - (\text{número con tantos 1 como cifras tenga el } \# \text{ mayor})$$

Ejemplos:

¿Cuántas cifras se emplea para escribir la serie natural de los números hasta el 3 475?

Solución:

$$\# \text{ de cifras} = (3\ 475 + 1) (4) - (1\ 111)$$

$$\# \text{ de cifras} = 3\ 476 \cdot 4 - 1\ 111$$

$$\# \text{ de cifras} = 13\ 904 - 1\ 111 = 12\ 793$$

¿Cuántas cifras se ha empleado para escribir la serie natural de los números hasta 15 497?

Solución:

$$\# \text{ de cifras} = (15\ 497 + 1) (5) - 11\ 111$$

$$\# \text{ de cifras} = 15\ 498 \cdot 5 - 11\ 111$$

$$\# \text{ de cifras} = 66\ 379$$

EN BASE N:

$$\# \text{ de cifras} = (\# \text{ mayor} + 1) (\# \text{ cifras del } \# \text{ mayor}) - \left[\frac{n^k - 1}{n - 1} \right]$$

k = # de cifras del número mayor

n = base del sistema

Ejemplo:

¿Cuántas cifras se ha empleado para escribir hasta el número 8 427₍₉₎?

Solución:

$$8\ 427_{(9)} = 6\ 181$$

$$\# \text{ de cifras} = \left[(6\ 181 + 1) \cdot 4 - \frac{9^4 - 1}{9 - 1} \right]$$

$$\# \text{ de cifras} = 23\ 908$$

CÁLCULO DE LA CANTIDAD DE NÚMEROS DE “n” CIFRAS, EN BASE “A”

Consiste en darle a cada cifra el número de valores que puede asumir. El producto de estos valores nos dá el número de combinaciones que a su vez es el número de números de “n” cifras.

$$\# \text{ de números} = (\text{base} - 1) (\text{base} - 1)^{(n-1)}$$

Observar que:

“n” es el número de cifras, pero cuando las cifras se repiten, esa cifra se toma una sola vez.

Ejemplo:

¿Cuántos números de la forma $\overline{a\ b\ b}_{(12)}$ existen?

Solución: $\overline{a\ b\ b}$

Tiene 1 cifra repetida y distinta a la primera cifra.

Por lo tanto:

$$\# \text{ de cifras} = (12 - 1) (12 - 1)^{(2-1)} = 121$$

SUMATORIA DE PRIMEROS NÚMEROS DE LA SERIE NATURAL EN BASE 10

1) Suma de los “n” primeros números consecutivos de la serie natural.

$$S_C = 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 2) + (n - 1) + n$$

$$S_C = \frac{n(n + 1)}{2}$$

2) Suma de los “n” primeros números impares consecutivos de la serie natural de los números.

$$S_i = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 3) + (2n - 1)$$

$$S_i = n^2$$



- 3) Suma de los “n” primeros números pares consecutivos de la serie natural de los números.

$$S_p = 2 + 4 + 6 + \dots + (2n - 4) + (2n - 2) + 2n$$

$$S_p = n(n + 1)$$

OPERACIONES BÁSICAS SOBRE NÚMEROS REALES

SUMA O ADICIÓN

1) LEY CONMUTATIVA

En una suma, el orden de los sumandos no altera la suma total. Así:

$$a + b + c = c + a + b = S$$

Ejemplo:

$$4 + 9 + 12 = 12 + 4 + 9 = 25$$

2) LEY ASOCIATIVA

En una suma de varios sumandos, dos o más de ellos pueden ser sustituidos por su suma parcial y la suma total no se altera.

$$a + b + c = (a + b) + c = S$$

Ejemplo:

$$6 + 8 + 3 + 11 = 14 + 3 + 11 = 28$$

3) LEY DE UNIFORMIDAD

Si se suma miembro a miembro dos o más igualdades, el resultado es otra igualdad.

$$a + c = m \quad 5 + 3 = 8$$

$$b + d = n \quad 6 + 9 = 15$$

$$r + p = h \quad 8 + 10 = 18$$

$$\underline{S = S} \quad \underline{41 = 41}$$

4) LEY DE MONOTONÍA

- a) Si se suma miembro a miembro igualdades con desigualdades del mismo sentido, el resultado es una desigualdad cuyo sentido es el mismo que el de las desigualdades.

Ejemplo:

$$6 = 6$$

$$5 = 5$$

$$9 > 4$$

$$13 > 11$$

Resultado $33 > 26$

- b) Si se suma miembro a miembro dos o más desigualdades del mismo sentido, el resultado es otra desigualdad del mismo sentido que las anteriores.

Ejemplo:

$$5 < 8$$

$$6 < 9$$

$$18 < 60$$

Resultado $29 > 77$

RESTA O SUSTRACCIÓN

Forma general:

$$M - S = D$$

Donde, los términos son:

M = minuendo

S = sustraendo

D = diferencia

VARIACIONES DE LOS TÉRMINOS DE LA RESTA

- 1) Si al minuendo se le suma o se le resta un número cualquiera sin alterar el sustraendo, entonces la diferencia queda aumentada o disminuida, respectivamente, en dicha cantidad.

$$(M \pm n) - S = D \pm n$$

- 2) Si al sustraendo se le suma o se le resta un número cualquiera, sin alterar el minuendo entonces la diferencia queda disminuida o aumentada, respectivamente, en dicha cantidad.

$$M - (S \pm n) = D \mp n$$

- 3) Si al minuendo y sustraendo se le suma o se le resta un mismo número, la diferencia no se altera.

$$(M \pm n) - (S \pm n) = D$$

COMPLEMENTO ARITMÉTICO “C.A.”

C.A. de un número es otro número equivalente a lo que le falta al primero para ser igual a la unidad decimal de orden inmediato superior.

Ejemplo:

C.A. de 0,03 es 0,07 porque $0,1 - 0,03 = 0,07$

C.A. de 6 es 4 porque $10 - 6 = 4$

C.A. de 367 es 633 porque $1\ 000 - 367 = 633$

LA MULTIPLICACIÓN

1) LEY CONMUTATIVA

El orden de los factores no altera el producto.

$$a \cdot b = b \cdot a = P$$

Ejemplo:

$$7 \cdot 4 = 4 \cdot 7 = 28$$

2) LEY DISTRIBUTIVA RESPECTO A LA SUMA

El producto de un factor por la suma indicada de dos o más sumandos es igual a la suma de los productos del factor por cada sumando.

$$a(n + m) = a \cdot n + a \cdot m = P$$

Ejemplo:

$$5(8 + 3) = 5 \cdot 8 + 5 \cdot 3 = 55$$

3) LEY DISTRIBUTIVA RESPECTO A LA RESTA

El producto de un factor por una resta indicada es igual a la diferencia del producto del factor por el minuendo menos el producto del factor por el sustraendo.

$$a(n - m) = a \cdot n - a \cdot m = P$$

Ejemplo:

$$5(8 - 3) = 5 \cdot 8 - 5 \cdot 3 = 25$$

4) LEY DE UNIFORMIDAD

Si se multiplica miembro a miembro dos igualdades, el resultado es otra igualdad.

$$\begin{array}{r} a = b \\ m = n \\ \hline a \cdot m = b \cdot n \end{array}$$

5) LEY DE MONOTONÍA

Si se multiplica miembro a miembro igualdades con desigualdades del mismo sentido, el resultado es otra desigualdad del mismo sentido que las anteriores.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 3 = 3 \\ 5 > 2 \\ 3 > 1 \\ \hline \end{array}$$

Multiplicando $45 > 6$

Si se multiplica miembro a miembro desigualdades del mismo sentido, el resultado es otra desigualdad del mismo sentido que las anteriores.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 3 < 5 \\ 8 < 9 \\ 2 < 7 \\ \hline \end{array}$$

Multiplicando $48 < 315$

PROPIEDAD FUNDAMENTAL DEL NÚMERO ENTERO

$$10^{n-1} \leq N < 10^n$$

N = número entero

n = número de cifras del número

LA DIVISIÓN

Es una operación que consiste en hallar un factor llamado cociente, el cual indica el número de veces que un factor, llamado divisor, está contenido en otro llamado dividendo.

$$D = d \cdot q \Leftrightarrow \frac{D}{d} = q$$

Donde: D = dividendo

d = divisor

q = cociente



Además, cuando la división es inexacta tiene un residuo.

a) División inexacta por defecto:

$$D = d \cdot q + r$$

Donde:

$$R \neq 0, r < d$$

b) División inexacta por exceso:

$$D = d(q + 1) - r'$$

Donde:

$$r' \neq 0, 0 < r' < d$$

1) LEY DE UNIFORMIDAD

Si se divide miembro a miembro dos igualdades, el resultado es otra igualdad; si las divisiones son exactas.

$$A = B \text{ y } C = D$$

Luego:

$$\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$$

2) LEY DE MONOTONÍA

Si ambos miembros de una desigualdad son divididos por un mismo número que sea divisor de ambos, se obtiene otra desigualdad cuyo sentido es el mismo que la desigualdad dada.

$$A > B; \text{ "d" divisor de ambos} \Rightarrow \frac{A}{d} > \frac{B}{d}$$

3) LEY DISTRIBUTIVA RESPECTO DE LA SUMA

El cociente de una suma indicada dividida por un divisor es igual a la suma de los sumandos divididos cada uno por el divisor común.

$$\frac{a + b + c + m}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d} + \frac{m}{d} = q$$

4) LEY DISTRIBUTIVA RESPECTO A LA RESTA

El cociente de una resta indicada dividida por un divisor común es igual a la resta de los cocientes resultantes.

$$\frac{a - b}{d} = \frac{a}{d} - \frac{b}{d} = q$$

ALTERACIONES DE LOS TÉRMINOS DE UNA DIVISIÓN

1) Alteración del dividendo.-

En una división exacta, si al dividendo se le multiplica o se le divide por un número cualquiera, sin alterar el divisor, entonces el cociente queda multiplicado o dividido, respectivamente, por el mismo número.

Casos:

$$a) \frac{D}{d} = q \quad ; \quad \frac{D \cdot n}{d} = q \cdot n$$

$$b) \frac{D}{d} = q \quad ; \quad \frac{D \div n}{d} = q \div n$$

2) Alteración del divisor.-

En una división exacta, si al divisor se le multiplica o se le divide por un número cualquiera, sin alterar el dividendo, entonces el cociente queda dividido o multiplicado respectivamente, por dicho número.

Casos:

$$a) \frac{D}{d} = q \quad ; \quad \frac{D}{d \cdot n} = q \div n$$

$$b) \frac{D}{d} = q \quad ; \quad \frac{D}{d \div n} = q \cdot n$$

3) Alteración del dividendo y divisor.-

En una división exacta, si al dividendo y al divisor se les multiplica o divide simultáneamente por un mismo número, el cociente no varía.

Casos:

$$a) \frac{D}{d} = q \quad ; \quad \frac{D \cdot n}{q \cdot d} = q$$

$$b) \frac{D}{d} = q \quad ; \quad \frac{D \div n}{q \div d} = q$$

En una división inexacta, si al dividendo y al divisor se les multiplica o se les divide por el mismo número, el cociente no se altera, pero el residuo queda multiplicado o dividido respectivamente, por el mismo número.

a) $\frac{D}{d} = q + r$; $\frac{D \cdot n}{d \cdot n} = q + r \cdot n$

$$a = \frac{q \cdot D}{q - 1}$$

$$b = \frac{D}{q - 1}$$

b) $\frac{D}{d} = q + r$; $\frac{D \div n}{d \div n} = q + r \div n$

5) Dados la diferencia "D", el cociente "q" y el residuo "r" de dos números "a" y "b", donde $a > b$.

$$a = \frac{D \cdot q - r}{q - 1}$$

$$b = \frac{D - r}{q - 1}$$

PROPIEDADES DEL RESTO O RESIDUO

1° El resto siempre es menor que el dividendo

$$r < d$$

2° El resto siempre debe ser menor que la mitad del dividendo:

$$r < \frac{D}{2}$$

3° El resto máximo siempre será igual al divisor menos uno:

$$r_{\text{máx}} = d - 1$$

4° La suma de los valores absolutos de los restos por defecto y por exceso siempre es igual al divisor.

$$|r| + |r'| = d$$

6) Dados el producto "P" y el cociente "q" de dos números "a" y "b", donde $a > b$

$$a = \sqrt{P \cdot q}$$

$$b = \sqrt{\frac{P}{q}}$$

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS

DIVISIBILIDAD (en Z)

Un número "A" es divisible por otro número "B" solamente si el cociente de dividir "A" por "B" es un número entero "n".

$$\frac{A}{B} = n \Rightarrow A = n \cdot B \Leftrightarrow n \in \mathbb{Z}$$

RELACIONES NOTABLES DE LAS CUATRO OPERACIONES

1) Dadas la suma "S" y la diferencia "D" de dos números "a" y "b", donde $a > b$:

$$a = \frac{S + D}{2}$$

$$b = \frac{S - D}{2}$$

DIVISOR

Es un número que está contenido en otro un número exacto (entero) de veces.

Ejemplo:

$$\{-8; -4; -2; -1; 1; 2; 4; 8\}$$

son todos los divisores de 8.

2) Dados la suma "S" y el cociente "q" de dos números "a" y "b", donde $a > b$:

$$a = \frac{q \cdot S}{q + 1}$$

$$b = \frac{S}{q + 1}$$

MÚLTIPLO

Múltiplo de un número es aquel número que contiene al primero un número (entero) exacto de veces.

Se denota:

$$A = m \cdot B$$

o, también así:

$$A = \overset{\circ}{B}$$

Ejemplos:

$$\{-16; -8; 8; 16; 24\}$$

son algunos múltiplos de 8.

4) Dados la diferencia "D" y el cociente "q" de dos números "a" y "b", donde $a > b$.

$$a = \frac{S \cdot q + r}{q + 1}$$

$$b = \frac{S - r}{q + 1}$$



PROPIEDADES DE LA DIVISIBILIDAD

1° Si un número “n” divide a varios otros números, divide también a la suma o a la diferencia de dichos números.

$$\frac{A}{n} = q_1 \quad ; \quad \frac{B}{n} = q_2$$

$$\Rightarrow \frac{A \pm B}{n} = q$$

2° Si un número “n” no divide exactamente a otros dos (A y B), dividirá exactamente a la diferencia de ellos (A - B) si y solamente si los residuos (r_1 y r_2) que resultan de dividir cada número entre el número “n” son iguales.

$$A = n \cdot q_1 + r_1$$

$$B = n \cdot q_2 + r_2$$

$$\text{Restando: } A - B = n(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2)$$

$$\Leftrightarrow r_1 - r_2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2$$

3° Si un número “n” divide exactamente a otro número “A”, también divide a todo múltiplo de éste.

$$\text{Si: } \frac{A}{n} = q_1$$

$$\Rightarrow \frac{m \cdot A}{n} = q_2$$

4° Si un número “A” es divisible por otro “n” lo es también por los factores de éste.

$$\text{Si: } \frac{A}{n} = q$$

$$\Rightarrow \frac{A}{n_1} = q_1 \quad ; \quad \frac{A}{n_2} = q_2 \quad ; \quad \frac{A}{n_3} = q_3$$

$$\text{donde: } n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$$

5° En una división inexacta, si un número “n” divide al dividendo “A” y al divisor “d”, también divide al residuo “r”.

$$\text{Sea: } \frac{A}{d} = q + r$$

$$\text{Si: } \frac{A}{n} = q_1 \quad \text{y} \quad \frac{d}{n} = q_2$$

$$\text{Entonces: } \frac{r}{n} = q_3$$

REGLAS PRÁCTICAS DE DIVISIBILIDAD

Se dice que un número es divisible:

Por 2, cuando termina en cero o en cifra par.

Por 4, cuando sus dos últimas cifras son ceros o múltiplos de 4.

Por 8, cuando sus tres últimas cifras son ceros o múltiplos de 8.

Por 5, cuando su última cifra es cero o cinco.

Por 25, cuando sus dos últimas cifras son ceros o un número múltiplo de 25.

Por 125, cuando sus tres últimas cifras son ceros o múltiplos de 125.

Por 2ⁿ o 5ⁿ, cuando las “n” últimas cifras son ceros o un número múltiplo de 2ⁿ o 5ⁿ.

Por 3, cuando la suma de sus cifras significativas es 3 o múltiplo de 3.

Por 9, cuando la suma de sus cifras significativas es 9 o múltiplo de 9.

Por 11, cuando la suma de las cifras que ocupan lugar impar menos la suma de las cifras que ocupan lugar par es: 0, 11 o múltiplo de 11.

Ejemplo: 538 527 es m11

$$\text{Lugar par: } 5 + 8 + 2 = 15$$

$$\text{Lugar impar: } 3 + 5 + 7 = 15$$

$$\Rightarrow 15 - 15 = 0$$

Por 6, cuando los es simultáneamente por 2 y por 3.

Por 22, cuando lo es simultáneamente por 2 y por 11.

Por 7, lo es cuando se verifica el siguiente procedimiento: “Se separa la última cifra significativa de la derecha, esta cifra se duplica y se resta al número que queda a la izquierda, con el resultado se hace lo mismo sucesivamente hasta llegar a un número pequeño tal, que a simple vista se

puede ver si es o no múltiplo de 7; si lo es, el número es divisible entre 7".

Ejemplos:

i) 63 743 no es m7.

$$6\ 374 - 2 \cdot 3 = 6\ 368$$

$$636 - 2 \cdot 8 = 620$$

$$6 - 2 \cdot 2 = 2$$

∴ NO es m7, porque: $2 \neq m7$

ii) 25 795

$$2\ 579 - 2 \cdot 5 = 2\ 569$$

$$256 - 2 \cdot 9 = 238$$

$$23 - 2 \cdot 8 = 7$$

∴ SI es m7, porque: $7 = m7$

Por 12, cuando lo es simultáneamente por 3 y por 4.

Por 14, cuando lo es simultáneamente por 2 y por 7.

Por 15, cuando lo es simultáneamente por 3 y por 5.

Por 16, cuando las 4 últimas cifra son ceros o el número formado por esta 4 últimas cifras es múltiplo de 16. Corresponde al caso de 2^n , cuando $n = 4$.

Por 17, cuando la diferencia entre sus decenas y el quintuple de sus unidades es 17 o m17.

Ejemplo: 2 975

$$297 - 5 \cdot 5 = 272$$

$$27 - 5 \cdot 2 = 17$$

∴ 2 975 = m17

Por 19, cuando la suma de sus decenas con el doble de sus unidades es 19 o m19.

Ejemplos:

i) 4 835 no es m19.

$$483 + 2 \cdot 5 = 493$$

$$49 + 2 \cdot 3 = 55 \neq M19$$

ii) 12 635

$$1\ 263 + 2 \cdot 5 = 1\ 273$$

$$127 + 2 \cdot 3 = 133$$

$$13 + 2 \cdot 3 = 19 = m19$$

NÚMEROS CONGRUENTES

Dos números son congruentes respecto de otro número "p", llamado módulo, si al dividir por este módulo originan el mismo resto.

Se denota: $A = p \cdot a + r$

$$B = p \cdot b + r$$

En general: $A \equiv B \pmod{P}$

Ejemplo:

Verificar que los números 50 y 32 son congruentes con el módulo 6.

$$\frac{50}{6} = 8 + 2$$

$$\frac{32}{6} = 5 + 2$$

Notar que la condición necesaria y suficiente para que dos números sean congruentes respecto a un módulo, es que su diferencia sea múltiplo del módulo.

$$A \equiv B \pmod{p} \Leftrightarrow A - B = \overset{p}{k}$$

Así, del ejemplo anterior:

$$50 - 32 = 18 \wedge 18 = m6$$

∴ $50 \equiv 32 \pmod{2}$

NÚMEROS PRIMOS (en \mathbb{N})

CLASIFICACIÓN

1. Primos absolutos o simplemente primos.-

Son aquellos números primos que sólo son divisibles entre la unidad y entre sí mismos.



Ejemplos:

- i) 1
- ii) 3
- iii) 17
- iv) 59

2. Primos relativos.-

Son dos o más números que simultáneamente sólo son divisibles entre la unidad, aunque independientemente pueden ser divisibles por otro número diferente de 1.

Ejemplo:

5; 9; 14;

son primos relativos porque no son divisibles entre sí, aun cuando el 9 y el 14 son divisibles por otros números y el 5 es primo absoluto.

NÚMERO COMPUESTO

Es todo número no primo, resultado de multiplicar dos o más números primos absolutos o las potencias de estos.

Ejemplos:

- i) $32 = 2^5$
- ii) $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$
- iii) $12 = 2^2 \cdot 3$
- iv) $33 = 3 \cdot 11$

CRIBA DE ERATÓSTENES

Es una tabla denominada también “Tabla de los Números Primos Absolutos” y permite obtener los primeros números primos.

REGLAS PARA SU CONSTRUCCIÓN

- 1° Se escribe todos los números en \mathbb{N} desde el 1 hasta el límite pedido.
- 2° Se tacha los múltiplos de 2, partiendo de 4.
- 3° El siguiente número no tachado es el 3; en consecuencia, se tacha los múltiplos de 3, partiendo de 9.

4° Dado que el siguiente número no tachado es el 5, se tacha los múltiplos de 5, partiendo de 25.

5° Así sucesivamente, hasta concluir. Los números que quedan son los primeros números primos absolutos.

Ejemplo:

Hallar los números primos en el rango de los 100 primeros números naturales.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

En conclusión:

{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 57, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97}

es el conjunto de los números primos en el rango del 1 al 100.

FÓRMULAS GENERALES

Todo número compuesto, como se mencionó, puede ser expresado como el producto de 1 por dos o más factores primos y se pondrá calcular algunos elementos asociados cuyas fórmulas se indica a continuación.

Sea N número un número compuesto:

$$N = a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma \cdot \dots \cdot w^\omega$$

Donde:

a, b, c, \dots, w = factores primos de N

$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \omega$ = exponentes de los factores primos de N

36	2	$36 = 2^2 \cdot 3^3$
18	2	sus factores son:
9	3	1, 2, 4
3	3	3, 6, 12
1		9, 18, 36

NÚMERO DE DIVISORES

1) $n = (\alpha + 1) (\beta + 1) (\gamma + 1) \dots (\omega + 1)$

n : número de divisores de N

Ejemplo:

$$N = 12 = 2^2 \cdot 3^1$$

$$n = (2 + 1) (1 + 1) = 6$$

{1, 2, 3, 4, 6, 12}

48	2	$48 = 2^4 \cdot 3$
24	2	sus factores son:
12	2	
6	2	1, 2, 4, 8, 16,
3	3	3, 6, 12, 24, 48
1		

SUMA DE DIVISORES

2) $S = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} \cdot \frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1} \cdot \frac{c^{\gamma+1} - 1}{c - 1} \cdot \dots \cdot \frac{w^{\omega+1} - 1}{w - 1}$

S : suma de los divisores de N

72	2	$72 = 2^3 \cdot 3^2$
36	2	sus factores son:
18	2	
9	3	1, 2, 4, 8,
3	3	3, 6, 12, 24,
1		9, 18, 36, 72

SUMA DE INVERSAS DE DIVISORES

3) $S_i = \frac{S}{N}$

S_i : suma de la inversa de los divisores de N .

Los “divisores comunes” a los números 36, 48 y 72 son: 1, 2, 3, 4, 6 y 12, pero el mayor de ellos es 12, éste es el MCD.

PROPIEDADES DEL M.C.D.

- 1) El MCD de los números primos es la unidad.
- 2) El MCD de dos o más números primos entre si es la unidad.
- 3) De dos números diferentes, estando uno contenido en el otro, MCD de ellos es el menor.
- 4) Si se divide dos números entre su MCD los cocientes que resultan son números primos relativos.

SUMA DE POTENCIAS DE LOS DIVISORES

4) $S_q = \frac{a^{q(\alpha+1)} - 1}{a - 1} \cdot \frac{b^{q(\beta+1)} - 1}{b - 1} \cdot \dots \cdot \frac{w^{q(\omega+1)} - 1}{w - 1}$

S_q : suma de las potencias “ q ” de los divisores de N

PRODUCTO DE DIVISORES

5) $P = \sqrt{N^n}$

P : producto de los divisores de N

MÁXIMO COMÚN DIVISOR (M.C.D)

Máximo común divisor de dos números es el mayor divisor común de ellos.

Ejemplo:

Hallar el MCD de los números 36, 48 y 72

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (m.c.m.)

Mínimo común múltiplo de dos o más números es el menor múltiplo común que contenga exactamente a los números dados.

REGLA PARA HALLAR EL m.c.m. DE DOS O MÁS NÚMEROS

Se descompone los números dados en sus factores primos; el m.c.m. de los números es igual al producto de los factores primos comunes y no comunes con sus mayores exponentes.



Ejemplo:

Hallar el mcm de 180; 528; 936.

180		2	528		2
90		2	264		2
45		3	132		2
15		3	66		2
5		5	33		3
1			11		11
			1		

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \quad 528 = 2^4 \cdot 3 \cdot 11$$

936		2
468		2
234		2
117		3
39		3
13		13
1		

$$936 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 13$$

$$\therefore \text{m.c.m.} (180; 528; 936) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 = 102\,960$$

PROPIEDADES

- 1° El mcm de dos o más números primos absolutos es igual al producto de ellos.
- 2° El mcm de dos números primos entre sí es el producto de ellos.
- 3° El cm de dos números, de los cuales uno contiene al otro es el mayor de ellos.
- 4° Si dos o más números son multiplicados o divididos por otro, el mcm queda multiplicado o dividido, respectivamente, por dicho número.
- 5° Si se divide el mcm de varios números entre cada uno de ellos, los cocientes resultantes son primos entre sí.
- 6° El producto de dos números enteros es igual al producto de MCD por el mcm.

$$\text{m.c.m.} = \frac{A \cdot B}{\text{MCD}}$$

o:

$$A \cdot B = (\text{mcm}) (\text{MCD})$$

NÚMEROS RACIONALES (Fracciones)

A. FRACCIONES ORDINARIAS

Número fraccionario o quebrado es aquel número que está constituido por una o más partes de la unidad.

NOTACIÓN

Una fracción se denota por:

$$\frac{a}{b}$$

donde:

a es el numerador
b es el denominador

CLASIFICACIÓN

1) Fracciones propias.-

Son aquellas cuyo numerador es menor que el denominador.

Ejemplo: $\frac{5}{9}$

2) Fracciones impropias.-

Son aquellas cuyo numerador es mayor que el denominador. Las fracciones impropias son las que dan origen a los números mixtos.

Ejemplo: $\frac{8}{3} = 2 \frac{2}{3}$ (número mixto)

3) Fracciones homogéneas.-

Dos o más fracciones son homogéneas cuando tienen el mismo denominador.

Ejemplo: $\frac{8}{9}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{22}{9}$

4) Fracciones heterogéneas.-

Dos o más fracciones son heterogéneas cuando tienen distintos denominadores.

Ejemplo: $\frac{4}{7}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{6}{11}$

5) Fracciones equivalentes.-

Una fracción es equivalente a otra fracción si la segunda resulta de multiplicar o dividir al numerador y al denominador de la primera por un mismo número.

Ejemplo: $\frac{a}{b} < > \frac{a \cdot K}{b \cdot K} < > \frac{a/K}{b/K}$

6) Fracción irreducible.-

Cuando el numerador y denominador son primos entre sí (primos relativos).

Ejemplo: $\frac{3}{7}$

7) Fracciones iguales a la unidad.-

Cuando tienen numerador y denominador iguales.

Ejemplo: $\frac{3}{3} = \frac{5}{5} = \frac{6}{6} = \dots = \frac{n}{n} = 1$

PROPIEDADES

1° Si el numerador y el denominador son multiplicados o divididos por un mismo número, el quebrado no varía.

Ejemplo: $\frac{5}{9} = \frac{5 \cdot 4}{9 \cdot 4} = \frac{5 \div 8}{9 \div 8}$

2° De varias fracciones homogéneas, es mayor la que tiene mayor numerador.

Ejemplo: $\frac{3}{17}, \frac{12}{17}, \frac{6}{17}$

$\frac{12}{17} > \frac{6}{17} > \frac{3}{17}$

3° De varias fracciones heterogéneas que tienen el mismo numerador, es mayor la que tiene menor denominador.

Ejemplo: $\frac{7}{15}, \frac{7}{31}, \frac{7}{6}$

∴ $\frac{7}{6} > \frac{7}{15} > \frac{7}{31}$

4° El mcm de dos o más fracciones irreducibles es igual al mcm de los numeradores dividido entre el MCD de los denominadores.

Sean las fracciones $\frac{a}{b}, \frac{n}{m}, \frac{c}{d}$, irreducibles:

$$\text{m.c.m.} = \frac{\text{mcm}(a, n, c)}{\text{MCD}(b, m, d)}$$

5° El MCD de dos o más fracciones irreducibles es igual al MCD de los numeradores dividido entre el m.c.m. de los denominadores.

Sean las fracciones $\frac{a}{b}, \frac{n}{m}, \frac{c}{d}$, irreducibles:

$$\text{MCD} = \frac{\text{MCD}(a, n, c)}{\text{mcm}(b, m, d)}$$

FRACCIONES DECIMALES

Una fracción es decimal si su denominador es 10 o múltiplo de 10.

Las fracciones decimales pueden ser:

CLASIFICACIÓN

a) Fracción decimal limitada.-

Son las que presentan un número limitado de cifras. A su vez, éstas puede ser:

- Fracción decimal exacta (fde).

Ejemplos:

0,362

0,125

- Fracción decimal periodica pura (fdpp).

Ejemplo: $0,\overline{31} \overline{31} \dots = 0,\overline{31}$

- Fracción decimal periódica mixta (fdpm).

Ejemplo: $0,25 \overline{37} \overline{37} \dots = 0,25 \overline{37}$

b) Fracción decimal ilimitada.-

Son las fracciones decimales que presentan un número indefinido de cifras y pueden ser:

- Números irracionales:

Ejemplo: $\sqrt{3} = 1,7320506 \dots$

- Números trascendentes

Ejemplos: $\pi = 3,14159265 \dots$

$e = 2,71828183 \dots$



TRANSFORMACIÓN DE FRACCIONES

1) Generatriz de una fracción decimal exacta.

Sea: $0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ una fde.

Su Generatriz es:

$$g = \frac{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}{10^n}$$

Ejemplos:

$$i) 0,183 = \frac{183}{10^3} = \frac{183}{1\ 000}$$

$$ii) 3,25 = \frac{325}{10^2} = \frac{325}{100}$$

2) Generatriz de una fracción decimal periódica pura.

Sea:

$0, b_1 b_2 b_3 \dots b_n b_1 b_2 b_3 \dots b_n$ una fdpp.

Su generatriz es:

$$g = \frac{b_1 b_2 b_3 \dots b_n}{10^n - 1}$$

Ejemplo: $0, \overline{31} \overline{31} \dots$

$$\text{Su generatriz: } g = \frac{31}{10^2 - 1} = \frac{31}{99}$$

3) Generatriz de una fracción decimal periódica mixta.

Sea:

$0, a_1 a_2 a_3 \dots a_m b_1 b_2 \dots b_n b_1 b_2 \dots$ una fdpm

Su generatriz correspondiente es:

$$g = \frac{(a_1 a_2 \dots a_m b_1 b_2 \dots b_n) - (a_1 a_2 \dots a_m)}{10^m (10^n - 1)}$$

Ejemplos:

$$i) 0,361515 \dots = \frac{3\ 615 - 36}{10^2(10^2 - 1)} = \frac{3\ 579}{9\ 900}$$

$$ii) 0,26161 \dots = \frac{261 - 2}{10^1(10^2 - 1)} = \frac{259}{990}$$

POTENCIA Y RADICACIÓN DE CUADRADOS Y CUBOS

CUADRADO Y RAÍZ CUADRADA

CUADRADO

Se denomina cuadrado o segunda potencia de un número, al producto que resulta de multiplicar dicho número por sí mismo.

OPERACIONES MÁS IMPORTANTES

$$1) a \cdot a = a^2$$

$$2) a^2 + 3a^2 = 4a^2$$

$$3) (a^n)^2 = a^{2n}$$

$$4) a^2 : a = \frac{a^2}{a^1} = a^{2-1} = a^1 = a$$

$$5) (a \cdot b^3 \cdot c^2)^2 = a^2 \cdot b^{3 \cdot 2} \cdot c^{2 \cdot 2} = a^2 \cdot b^6 \cdot c^4$$

$$6) \left(\frac{a^n}{b^m}\right)^2 = \frac{a^{2n}}{b^{2m}}$$

$$7) (a \cdot 10^n)^2 = a^2 \cdot 10^{2n}$$

CUADRADO PERFECTO

Un número es un cuadrado perfecto cuando al descomponerlo en el producto de sus factores primos, éstos presentan exponentes múltiplos de 2.

$$n = a^{\overset{\circ}{2}} \cdot b^{\overset{\circ}{2}} \cdot c^{\overset{\circ}{2}} \cdot d^{\overset{\circ}{2}} ; (\overset{\circ}{2} = \text{múltiplo de } 2)$$

$$\text{Ejemplo: } 324 = 2^2 \cdot 3^4$$

RAÍZ CUADRADA

Raíz cuadrada de un número, es otro número que, elevado al cuadrado, reproduce el número original.

$$\sqrt{N} = q \Rightarrow q^2 = N$$

La raíz cuadrada puede ser exacta o inexacta

Exacta: $\sqrt{N} = q$

Inexacta: $\sqrt{N} = q + r$

RAÍZ CUADRADA CON APROXIMACIÓN EN MENOS DE UNA FRACCIÓN

$$A = \frac{a}{b} \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot N}$$

N = número a extraer su raíz cuadrada

A = raíz cuadrada con aproximación de una fracción

$\frac{a}{b}$ = fracción de aproximación

Ejemplo:

Hallar $\sqrt{196}$ con una aproximación menor que $\frac{3}{7}$

$$A = \frac{3}{7} \sqrt{\left(\frac{7}{3}\right)^2 \cdot 196} = \frac{3}{7} \sqrt{\frac{7^2 \cdot (4 \cdot 7^2)}{3^2}}$$

$$= \frac{3}{7} \sqrt{\frac{49^2 \cdot 2^2}{3^2}} = \frac{3 \cdot 49 \cdot 2}{7 \cdot 3} = 14$$

CUBO Y RAÍZ CÚBICA

CUBO

Se denomina cubo o tercera potencia de un número, al producto que resulta de multiplicar dicho número 3 veces como factor.

OPERACIONES MÁS IMPORTANTES

1) $a \cdot a \cdot a = a^3$

2) $(a^n)^3 = a^{3n}$

3) $a^3 : a = \frac{a^3}{a^1} = a^{3-1} = a^2$

4) $(a^n \cdot b^m \cdot c^p)^3 = a^{3n} \cdot b^{3m} \cdot c^{3p}$

5) $\left(\frac{a^n}{b^n}\right)^3 = \frac{a^{3n}}{b^{3n}}$

6) $(a \cdot 10^n)^3 = a^3 \cdot 10^{3n}$

7) $\left(\frac{a}{10^n}\right)^3 = \frac{a^3}{10^{3n}}$

RAÍZ CÚBICA

Es aquel número que, elevado al cubo, reproduce el número original.

$\sqrt[3]{N} = q \Rightarrow q^3 = N$

La raíz cúbica puede ser exacta e inexacta:

Exacta: $= \sqrt[3]{N} = q$

Inexacta: $= \sqrt[3]{N} = q + r$

RAÍZ CÚBICA CON APROXIMACIÓN MENOR QUE UNA FRACCIÓN

$$A = \frac{a}{b} \sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^3 \cdot N}$$

N = número a extraer a su raíz cúbica

A = raíz cúbica con aproximación

$\frac{a}{b}$ = fracción de aproximación

Ejemplo:

Hallar $\sqrt[3]{27\ 000}$ con aproximación de $\frac{1}{2}$

$$A = \frac{1}{2} \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3 \cdot 10^3} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{216 \cdot 10^3} = \frac{6 \cdot 10}{2} = 30$$

SISTEMAS DE MEDIDAS

SISTEMAS TRADICIONALES

SISTEMA MÉTRICO

La definición moderna de 1 metro equivale a 1 650 736, 73 veces la longitud de onda de la luz anaranjada emitida por los átomos de un isótopo puro de criptón (criptón 86) bajo una descarga eléctrica.



MEDIDAS AGRARIAS

1 área	= 100m ²
Hectárea	= 10 000m ² = 100 áreas
Centiárea	= 1m ²

MEDIDAS DE VOLUMEN

1 metro cúbico	= 1m ³
1 decímetro cúbico	= 0,001 m ³
1 centímetro cúbico	= 0,000001 m ³
1 milímetro cúbico	= 0,000000001 m ³

MEDIDAS DE CAPACIDAD

1 Mirialitro	= ML = 10 000 L
1 kilolitro	= kL = 1 000 L
1 Decalitro	= DL = 10 L
1 Litro	= Lt = 1L = 1 decímetro cúbico
1 decilitro	= dL = 0,1 L
1 centilitro	= cL = 0,01 L
1 mililitro	= mL = 0,001 L

MEDIDAS DE PESO

1 tonelada métrica	= 1 000 kilos
1 quintal métrico	= 100 kilos

SISTEMA ESPAÑOL

LONGITUD

1 legua	= 6 666 2/3 varas = 4 827 m
1 vara	= 2,76 pies = 0,84 m
1 pie	= 12 pulgadas = 30,48 cm
1 pulgada	= 2,54 cm

SUPERFICIE

1 vara cuadrada	= 0,7 m ²
-----------------	----------------------

AGRARIA

1 fanegada	= 28 978 m ² = 3Ha
------------	-------------------------------

1 fanegada: es el área de terreno equivalente a 144 varas de ancho y 288 varas de largo.

VOLUMEN

1 vara cúbica	= 0,59 m ³
---------------	-----------------------

PESO

1 tonelada	= 20 quintales = 920 kg
1 quintal	= 4 arrobas = 46 kg
1 arroba	= 25 libras = 11,4 kg
1 libra	= 16 onzas = 0,454 kg
1 onza	= 8 dracmas = 28,38 g
1 dracma	= 2 adarmes = 2,5 g
1 adarme	= 3 tomines = 1,25 g

SISTEMA INGLES

LONGITUD

1 yarda	= 3 pies = 0,914 m
1 pie	= 12 pulgadas = 30,48 cm
1 pulgada	= 2,54 cm

LONGITUD: Itinerarias

1 milla marina	= 1 852 m
1 milla terrestre	= 1 609 m

SUPERFICIE

1 yarda cuadrada	= 0,836 m ²
1 pie cuadrado	= 0,093 m ²
1 pulgada cuadrada	= 0,000645 m ²

AGRARIA

1 acre	= 43 560 pies cuadrados = 4 047 m ²
--------	--

VOLUMEN

- 1 yarda cúbica = 0,7646 m³
- 1 pie cúbico = 0,02832 m³
- 1 pulgada cúbica = 0,000016 m³

CAPACIDAD

- 1 galón imperial = 4,546 L
- (1 galón U.S.A. = 3,785 L)

PESO

Se utiliza tres sistemas:

Avoirdupois (más utilizado)

Troy (usado para metales nobles)

Apothecables (usado en farmacias)

SISTEMA AVOIRDUPOIS (avdp)

- 1 tonelada larga = 2 240,0 lb = 1 016,05 = kg
- 1 tonelada corta = 2 000,0 lb = 907,18 = kg
- 1 quintal = 100,0 lb = 45,36 = kg
- 1 libra = 16,0 Onz. = 453,59 = g
- 1 onza = 16,0 dracmas = 28,35 = g
- 1 dracma = 27,3 granos = 1,77 = g

DENSIDAD DE ALGUNOS CUERPOS g/cm³

- agua destilada = 1
- agua de mar = 1,03
- aire = 0,00129
- hielo = 0,92
- hierro = 7,8
- leche = 1,03
- petróleo = 0,8

RELACIONES ENTRE LONGITUD Y TIEMPO

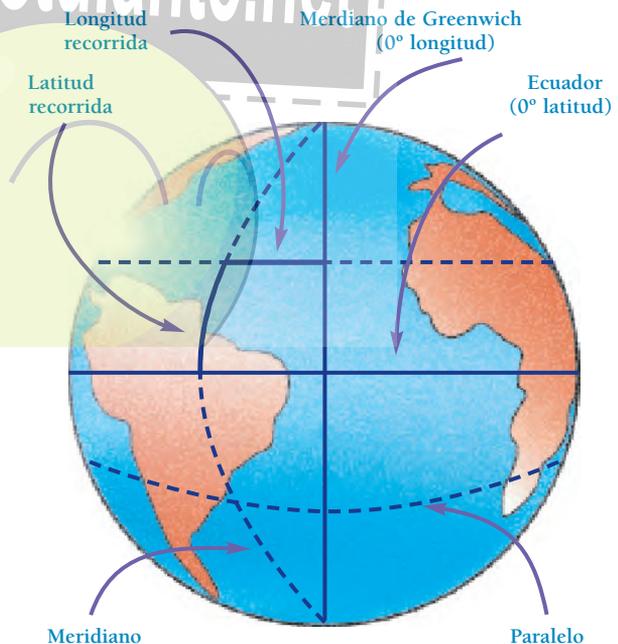
Tiempo	Arco
1 día	= 360°
1 hora	= 15°
1 minuto	= 15'
1 segundo	= 15"

DIMENSIONES GEOGRÁFICAS

Longitud: Distancia medida en arco sobre un círculo máximo de la tierra (el Ecuador) al meridiano de Greenwich.

Latitud: Distancia, medida en arco sobre un meridiano de cualquier punto al Ecuador.

Longitud y Latitud del punto P:



SISTEMA INTERNACIONAL (SI)

Está basada en el sistema métrico.

UNIDADES DE BASE

Son 7 unidades de base, establecidas arbitrariamente y consideradas independientemente porque no guardan relación entre sí:



MAGNITUDES FÍSICAS	UNIDAD DE MEDIDA	
	NOMBRE	SÍMBOLO
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Intensidad de corriente eléctrica	ampere	A
Temperatura termodinámica	kelvin	K
Intensidad luminosa	candela	cd
Cantidad de materia	mol	mol

UNIDADES SUPLEMENTARIAS

MAGNITUD FÍSICA	UNIDAD DE MEDIDA	
	NOMBRE	SÍMBOLO
Ángulo plano	radián	rad
Ángulo sólido	estereoradián	sr

RAZONES Y PROPORCIONES

RAZONES

Se llama “razón” a la comparación de dos cantidades. Esta comparación puede hacerse mediante una DIFERENCIA, en tal caso se llama “razón aritmética”, o mediante una DIVISIÓN, en tal caso se llama “razón geométrica”.

Razón Aritmética (R A)

$$a - b = d$$

Razón Geométrica (R G)

$$\frac{a}{b} = K$$

donde:

a: antecedente

b: consecuente

PROPIEDADES Y LEYES

Con la R A es una diferencia y la R G es una división, éstas cumple con las mismas propiedades de la resta y división, respectivamente.

PROPORCIONES

Se llama “proporción” a la igualdad de dos razones, siendo la característica principal que estas razones son iguales. Las proporciones pueden ser Aritméticas y Geométricas.

PROPORCIÓN ARITMÉTICA

Sean las R A: $a - b = k$

$$c - d = k$$

∴ P A: $a - b = c - d$

o, también: $a : b = c : d$

Se lee: “a es a b, como c es a d”

PROPORCIÓN GEOMÉTRICA

Sean las R G

$$\frac{a}{b} = k$$

$$\frac{c}{d} = k$$

∴ P G: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

o, también: $a : b :: c : d$

Se lee: “a es a b, como c es a d”

CLASES DE PROPORCIONES SEGÚN SUS TÉRMINOS

1) Proporción discreta.-

Una proporción Aritmética o Geométrica es discreta si sus términos son diferentes:

Sean:

$$a - b = c - d \vee \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\Rightarrow a \neq b \neq c \neq d$$

En este caso, cualquiera de los términos se llama "Tercera Proporcional".

2) Proporción continua.-

Una proporción Aritmética o Geométrica es continua si sus términos medios, o sus términos extremos son iguales así:

Sean:

$$a - b = c - d \vee \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\Rightarrow b = c \vee a = d$$

En este caso cualquiera de los términos diferentes se llama "Tercera Proporcional" y al término que se repite se le llama:

"media diferencial" si es P A

"media proporcional" si es P G

TÉRMINOS NOTABLES

MEDIA DIFERENCIAL (m d)

Sea la P A continua: $a - b = b - d$

$$b = \frac{a + d}{2}$$

MEDIA PROPORCIONAL (m p)

Sea la P G continua: $\frac{a}{b} = \frac{b}{d}$

$$b = \sqrt{a \cdot d}$$

MEDIA ARMÓNICA (m h)

Sean los números a y b; con inversas:

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$$

$$\therefore m_h = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

PROMEDIOS

Se denomina promedio, o cantidad media, a una cantidad tal que: de varias cantidades, el promedio es mayor que la inferior pero menor que la superior. Puede ser Aritmética, Geométrica o Armónica.

MEDIDA ARITMÉTICA:

$$M_a = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \quad a_1 < M_a < a_n$$

MEDIDA GEOMÉTRICA:

$$M_g = \sqrt{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n} \quad a_1 < M_g < a_n$$

MEDIDA ARMÓNICA:

$$M_h = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}} \quad a_1 < M_h < a_n$$

Además, se cumple que:

$$M_a > M_g \quad M_g^2 = M_a \cdot M_h$$

y, el producto de dos cantidades es igual al producto de su media aritmética por su media armónica.

$$a \cdot b = M_a \cdot M_h$$

PROPIEDADES DE LAS PROPORCIONES GEOMÉTRICAS

Si: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, se cumple las siguientes propiedades:

$$\frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{c + d}{c - d}$$

$$\frac{a + c}{a - c} = \frac{b + d}{b - d}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{c}{d}\right)^n$$



$$\frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{c}{d}}$$

Si: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$, se verifica las siguientes propiedades.

$$\frac{a+c+e}{b+d+f} = k$$

$$\frac{a \cdot c \cdot e}{b \cdot d \cdot f} = k^3$$

b) Inversa: $a \cdot b = c \cdot x \Rightarrow x = \frac{a \cdot b}{c}$

REGLA DEL TANTO POR CIENTO

La regla del tanto por ciento es un caso particular de la regla de tres simple directa.

Ejemplo:

Calcular el 8% de 98.

A mayor tasa, mayor interés. Son directamente proporcionales, luego:

$$\frac{8}{100} = \frac{x}{98}$$

$$x = \frac{8 \cdot 98}{100}$$

MAGNITUDES PROPORCIONALES

Magnitudes proporcionales son aquellas que guardan alguna relación matemática entre sí. Pueden ser directa e inversamente proporcionales.

Magnitudes directamente proporcionales.-

Se dice que dos magnitudes "A" y "B" son directamente proporcionales, cuando los cocientes de cada par de sus valores son iguales:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n\}$$

$$\therefore \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = k$$

Magnitudes inversas proporcionales.-

Se dice que dos magnitudes "A" y "B" son inversamente proporcionales, cuando los productos de cada par de sus valores son iguales.

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n\}$$

$$\therefore a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = a_3 \cdot b_3 = \dots = a_n \cdot b_n = k$$

REGLA DE TRES

REGLA DE TRES SIMPLE

Se emplea para calcular un cuarto valor cuando otros tres son conocidos. La regla de tres simple puede ser: directa e inversa.

a) Directa: $\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \Rightarrow x = \frac{b \cdot c}{a}$

REGLA DE TRES COMPUESTA

Una regla de tres compuesta está formada por una o más reglas de tres simple, que pueden ser todas directamente proporcionales o todas inversamente proporcionales o de proporción mixta.

Ejemplo:

5 hombres en 8 días fabrican 600 m de tela.

13 hombres en x días fabrican 1 300 m de tela.

$$\Rightarrow x = \frac{5 \cdot 13 \cdot 1\,300}{8 \cdot 600} = 17,6 \text{ días} = 18 \text{ días}$$

ARITMÉTICA MERCANTIL

INTERÉS SIMPLE

INTERÉS O RÉDITO

Se denomina Interés o Rédito a la ganancia que produce una cantidad llamada Capital, prestada por un tiempo determinado y según una tasa fijada.

Hay dos clases de intereses: Simple y Compuesto. El Interés Compuesto se estudia en Algebra.

FÓRMULAS BÁSICAS

$$I = \frac{C \cdot i \cdot t}{100}$$

$$C = \frac{100 \cdot I}{i \cdot t}$$

$$M = C + I$$

I = Interés o rédito ganado.

C = Capital impuesto a un interés.

i = Tasa de interés (porcentaje que gana el capital).

t = Tiempo que demora el préstamo.

Si el tiempo es en años, se usa 100; si el tiempo está en meses, se usa 1 200; si el tiempo está en días, se usa 36 000.

M = Monto final que equivale a la suma del capital más el interés.

FÓRMULAS PARA CALCULAR EL MONTO EN FUNCIÓN DEL CAPITAL

$$M = \frac{C(100 + i \cdot t)}{100}$$

t en años

$$M = \frac{C(1\ 200 + i \cdot t)}{1\ 200}$$

t en meses

$$M = \frac{C(36\ 000 + i \cdot t)}{36\ 000}$$

t en días

$$Dc = \frac{Vn \cdot i \cdot t}{100}$$

t en años

$$Dc = \frac{Vn \cdot i \cdot t}{1\ 200}$$

t en meses

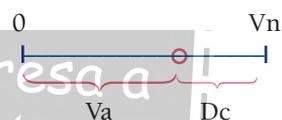
$$Dc = \frac{Vn \cdot i \cdot t}{36\ 000}$$

t en días

Además se define el nuevo valor a cobrar como:

$$Va = Vn - Dc$$

Va = Valor actual



valor actual en función del valor nominal

$$Va = \frac{Vn(100 - i \cdot t)}{100}$$

$$Va = \frac{Vn(1\ 200 - i \cdot t)}{1\ 200}$$

$$Va = \frac{Vn(36\ 000 - i \cdot t)}{36\ 000}$$

DESCUENTO

Es la disminución que se hace a una cantidad indicada en un documento comercial para hacer efectivo su cobro antes de la fecha fijada para su vencimiento. El documento comercial, según su naturaleza se denomina:

Letra de cambio, Pagaré, Cheque bancario.

Hay dos clases de descuento:

Comercial y Racional.

DESCUENTO COMERCIAL

Es el interés simple, Dc, que produce el “Valor Nominal”, Vn (que es aquel escrito en el documento) de una letra desde el día en que se hace el descuento hasta el día del vencimiento; a este descuento se le conoce también como descuento interno.

DESCUENTO RACIONAL

Es el interés simple producido por el Valor Actual” de una letra, desde el día en que se hace el descuento hasta el día de su vencimiento.

$$Dr = \frac{Va \cdot i \cdot t}{100}$$

$$Dr = \frac{Va \cdot i \cdot t}{1\ 200}$$

$$Dr = \frac{Va \cdot i \cdot t}{36\ 000}$$

De este modo:

$$Vn = Va + Dr$$



VALOR ACTUAL EN FUNCIÓN DEL VALOR NOMINAL

$$V_a = \frac{100 \cdot V_n}{100 + i \cdot t}$$

$$V_a = \frac{1\,200 \cdot V_n}{1\,200 + i \cdot t}$$

$$V_a = \frac{36\,000 \cdot V_n}{36\,000 + i \cdot t}$$

COMPARACIÓN DEL DESCUENTO COMERCIAL CON EL DESCUENTO RACIONAL

Sólo por fines comparativos, establezcamos

$$D_r = \frac{V_n \cdot i \cdot t}{100 + i \cdot t}$$

$$D_r = \frac{V_n \cdot i \cdot t}{1\,200 + i \cdot t}$$

$$D_r = \frac{V_n \cdot i \cdot t}{36\,000 + i \cdot t}$$

Lo que cual, nos permite deducir que:

$$D_c > D_r$$

$$D_c - D_r = \frac{D_r \cdot i \cdot t}{100}$$

$$V_n = \frac{D_c \cdot D_r}{D_c - D_r}$$

VENCIMIENTO COMÚN

Es una operación comercial que consiste en realizar una pago único de dos o más letras de cambio que tienen diferentes vencimientos; la fecha en que se realiza el pago único se denomina vencimiento común.

$$t = \frac{V_1 + t_1 \cdot V_2 \cdot t_2 + \dots + V_n \cdot t_n}{V_1 + V_2 + \dots + V_n}$$

t = Número de días o plazo de vencimiento de la letra única.

t_1, t_2, \dots, t_n = Plazo de vencimiento de cada una de las otras letras.

V_1, V_2, \dots, V_n = Valores nominales de las otras letras.

DESCUENTOS SUCESIVOS

Todo los descuentos sucesivos aplicables, pueden ser consolidados en un descuento único "D.U.":

$$D.U. = \left[D_1 + D_2 - \frac{D_1 \cdot D_2}{100} \right] \%$$

D_1 = primer descuento

D_2 = segundo descuento

Ejemplo:

Un comprador logra un primer descuento de 25% y un descuento adicional, sobre el nuevo monto, del 10%. Se pregunta ¿Cuál es el descuento final (único) que obtiene?

Solución:

Aplicando la fórmula:

$$D.U. = \left[25 + 10 - \frac{25 \cdot 10}{100} \right]$$

$$D.U. = 35 - 2,5 = 32,5$$

$$\text{Luego: } D.U. = 32,5 \%$$

Como podrá observarse el descuento único NO es el 35 % (25 + 10).

AUMENTOS SUCESIVOS

Porcentajes de aumento a las nuevas cantidades, resultan en un Aumento Único "A.U.":

$$A.U. = \left[A_1 + A_2 + \frac{A_1 \cdot A_2}{100} \right]$$

Ejemplo:

Un capital aumenta en dos porcentajes sucesivos de 18 % y 12 %. ¿Cuál es el porcentaje de aumento único?

Solución:

Dado que el 12% se aplica sobre el nuevo monto, la respuesta No Es 40% (18 + 12):

$$A.U. = \left[18 + 12 + \frac{18 \cdot 12}{100} \right]$$

$$A.U. = 30 + 2,16 = 32,16$$

Luego: A.U. = 32,16 %

REGLAS DE FALSA SUPOSICIÓN

Consiste en un supuesto que se hace del valor numérico de la respuesta a un problema. Puede ser SIMPLE o DOBLE.

1) Simple.-

Se asigna a la incógnita un valor numérico supuesto. Si este valor se opera y se cumple con el problema, es la respuesta; en caso contrario, se plantea la proporción:

$$\frac{\text{Resultado obtenido}}{\text{Número supuesto}} = \frac{\text{Resultado que debe obtenerse}}{\text{Incógnita}}$$

2) Doble.-

Consiste en suponer dos valores distintos para la incógnita, con estos valores se opera y la diferencia de cada uno de estos resultados con el verdadero, constituyen los errores.

$$x = \frac{V' \cdot e - V'' \cdot e'}{e'' - e'}$$

X = Incógnita

V' = Primer valor supuesto

V'' = Segundo valor supuesto

e' = Error que se comete con V'

e'' = Error que se comete con V''

REPARTIMIENTO PROPORCIONAL

TIPOLOGÍA

Consiste en repartir un número "N" en otros números tales como x, y, z, que sean a su vez proporcionales a los números a, b, c.

El reparto puede ser directo o inversamente proporcional.

1) Reparto directamente proporcional.-

Repartir el número "N" en partes directamente proporcionales a los números a, b, c.

Sean x, y, z los números buscados:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{N}{a + b + c}$$

De aquí:

$$x = \frac{N \cdot a}{a + b + c}$$

$$y = \frac{N \cdot b}{a + b + c}$$

$$z = \frac{N \cdot c}{a + b + c}$$

Por principio de proporción geométrica:

$$x + y + z = N$$

2) Reparto inversamente proporcional.-

Consiste en repartir el número "N" en 3 números que sean inversamente proporcionales a los números a, b, c.

Sean x, y, z los números buscados.

$$\frac{x}{\frac{1}{a}} = \frac{y}{\frac{1}{b}} = \frac{z}{\frac{1}{c}} = \frac{N}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

De aquí:

$$x = \frac{\frac{1}{a} \cdot N}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

$$y = \frac{\frac{1}{b} \cdot N}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

$$z = \frac{\frac{1}{c} \cdot N}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$



Por principio, se cumple que:

$$N = a + b + c$$

REPARTIMIENTO PROPORCIONAL COMPUESTO

Es repartir el número N en partes directamente proporcionales a los números a, b, c e inversamente proporcionales a los números a', b', c'.

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{N}{a' + b' + c'}$$

APLICACIONES

REGLA DE COMPAÑÍA O DE SOCIEDAD

Es una aplicación de los repartos proporcionales. El objetivo es repartir entre dos o más socios la ganancia o pérdida. Puede ser simple o compuesta.

REGLA DE COMPAÑÍA COMPUESTA

$$g_1 = \frac{G \cdot c_1 \cdot t_1}{c_1 \cdot t_1 + c_2 \cdot t_2 + \dots + c_n \cdot t_n}$$

$$g_2 = \frac{G \cdot c_2 \cdot t_2}{c_1 \cdot t_1 + c_2 \cdot t_2 + \dots + c_n \cdot t_n}$$

Donde:

g_1, g_2, \dots = ganancias o pérdidas de cada socio

G = ganancia o pérdida total

c_1, c_2, \dots = capitales aportados por cada socio

t_1, t_2, \dots = tiempo en que se impone cada capital

n = número de socios

REGLA DE COMPAÑÍA SIMPLE

Puede presentarse los siguientes casos:

a) Capitales iguales y tiempos iguales:

$$(c_1 = c_2 = \dots ; t_1 = t_2 = \dots)$$

$$g = \frac{G}{n}$$

(g = ganancia o pérdida)

Ganancia o pérdida igual para cada socio.

b) Capitales diferentes y tiempos iguales:

$$(t_1 = t_2 = \dots = t_n)$$

$$g_1 = \frac{G \cdot c_1}{c_1 + c_2 + \dots + c_n}$$

c) Capitales iguales y tiempos diferentes:

$$(c_1 = c_2 = \dots = c_n)$$

$$g_1 = \frac{G \cdot t_1}{t_1 + t_2 + \dots + t_n}$$

REGLA DE MEZCLA O ALIGACIÓN

Se presenta dos casos: Mezcla propiamente dicha y aleación.

A) MEZCLA

Es la unión de dos o más ingredientes, conservando cada cuál su naturaleza. Desde un punto de vista comercial, la mezcla se realiza con el objeto de establecer el precio promedio, de manera que no haya pérdida ni ganancia.

Puede ser Directa o Inversa.

REGLA DE MEZCLA DIRECTA

Sirve para calcular el precio promedio:

$$P_m = \frac{p_1 \cdot c_1 + p_2 \cdot c_2 + \dots + p_n \cdot c_n}{c_1 + c_2 + \dots + c_n}$$

P_m = Precio medio

$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ = Precios unitarios de cada ingrediente.

$c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ = cantidades de cada ingrediente.

REGLA DE MEZCLA INVERSA

Sirve para calcular las proporciones en que intervienen los ingredientes, conocidos sus precios unitarios y su precio medio.

$$\frac{x}{y} = \frac{P_m - p_y}{p_x - P_m}$$

x, y = ingredientes de la mezcla
(magnitudes físicas: peso, etc.)

P_m = precio medio de la mezcla

p_x, p_y = precios unitarios de los ingredientes

ALEACIÓN INVERSA

Se trata de calcular la proporción de los pesos de los lingotes que intervienen en la aleación, cuyas leyes se conoce:

$$\frac{x}{y} = \frac{L_s - L_m}{L_m - L_i}$$

x = peso del lingote de ley superior

y = peso del lingote de la ley inferior

L_s = ley del lingote de ley superior

L_i = ley del lingote de ley inferior

ALEACIÓN

Es el resultado que se obtiene al fundir varios metales, entre ellos siempre hay un metal más fino. La aleación es una mezcla.

L_m = ley media

CAMBIOS EN LA LEY DE UNA ALEACIÓN

LEY DE ALEACIÓN

Es la relación del peso del metal fino y el peso total de la aleación, se expresa en milésimos.

$$L = \frac{F}{P}$$

L = ley de aleación

F = peso del metal fino

P = peso de la aleación

AUMENTO DE LA LEY DE UNA ALEACIÓN

$$p = \frac{P(L_A - L)}{L_A}$$

p = peso del metal fino que se tiene que agregar

P = peso inicial de la aleación

L_A = nueva ley del lingote

L = ley inicial del lingote

ALEACIÓN DIRECTA

Se trata de calcular la ley de una aleación resultante al fundir lingotes de diferentes leyes.

$$L = \frac{F_1 + F_2 + \dots + F_n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n}$$

L = ley de aleación

$F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ = peso del metal fino en cada lingote.

$P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ = peso de cada lingote.

DISMINUCIÓN DE LA LEY DE UNA ALEACIÓN

$$p = \frac{P(L - L_D)}{L_D}$$

p = peso del metal pobre que se tiene que agregar

P = peso inicial de la aleación

L_D = nueva ley del lingote

L = ley inicial del lingote



LEY DE KILATES

Kilate es una forma de indicar la pureza de una aleación denotando el número de partes de metal fino en 24 partes de aleación.

Por ejemplo, oro de 18 kilates quiere decir que si la joya pesa 24, 18 son de oro. También se puede expresar en porcentaje.

$$L = \frac{\text{Número de kilates}}{24}$$

Ejemplo:

¿Que porcentaje de metal fino contiene unas joyas de oro de 18 kilates?

$$L = \frac{18}{24} = 0,75$$

∴ P = 75% de oro puro.



ÁLGEBRA

DEFINICIÓN

Es la parte de la matemática elemental que estudia a la cantidad en su forma más general. Para su estudio emplea números y letras.

NOTACIÓN USADA EN EL ÁLGEBRA

Las cantidades conocidas son representadas por las primeras letras del alfabeto: a, b, c, d, ... ; las cantidades desconocidas o incógnitas, por las últimas letras: x, y, z, ...

Para no repetir las letras, cuando hay alguna relación entre ellas se escribe:

$$a', b', c' \dots; \text{ o también : } a_1, b_2, c_3 \dots$$

Los signos empleados en el algebra, son de tres clases: de operación, de relación y de agrupación.

A) SIGNOS DE OPERACIÓN

Son seis: $+$; $-$; \cdot ; $:$; a^n ; $\sqrt{\quad}$

Ejemplos:

i) $+$, se lee: "más".

$$a + b, \text{ se lee: "a más b"}$$

ii) $-$, se lee: "menos"

$$a - b, \text{ se lee: "a menos b"}$$

iii) \cdot , se lee: "por"

$$a \cdot b, \text{ se lee: "a por b"}$$

iv) $:$, se lee: "entre"

$$a : b, \text{ se lee: "a entre b"}$$

v) Exponente:

a^n , se lee: "a, a la n". (signo de potencia)
Significa "n" veces "a" como factor, así:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_n$$

vi) $\sqrt{\quad}$, se lee: "raíz"

$$\sqrt{a}, \text{ se lee: "raíz cuadrada de a"}$$

B) SIGNOS DE RELACIÓN

$=$, se lee: "igual"

$$a = b, \text{ se lee: "a igual b"}$$

$>$, se lee: "mayor que"

$$a > b, \text{ se lee: "a mayor que b"}$$

$<$, se lee: "menor que"

$$a < b, \text{ se lee: "a menor que b"}$$

\geq , se lee: "igual o mayor que"

$$a \geq b, \text{ se lee: "a igual o mayor que b"}$$

\leq , se lee: "menor o igual que"

$$a \leq b, \text{ se lee: "a igual o menor que b"}$$



\equiv , se lee: "idénticamente igual a"

$a \equiv b$, se lee: "a idénticamente igual a b"

\neq , se lee: "diferente de"

$a \neq b$, se lee: "a diferente de b"

\nlessdot , se lee: "se lee no es menor que"

$a \nlessdot b$, se lee: "a no es menor que b"

\nlessdot , se lee: "no es mayor que"

$a \nlessdot b$, se lee: "a no es mayor que b"

\approx , se lee: "aproximadamente igual a"

$a \approx b$, se lee: "a aproximadamente a b"

\Leftrightarrow , se lee: "equivalente a"

$a \Leftrightarrow b$, se lee: "a equivalente a b"

\Rightarrow , se lee: "a entonces b"

$a \Rightarrow b$, se lee: "a entonces a b" o "a implica a b"

\wedge , se lee: "y"

$a \wedge b$, se lee: "a y b"

\vee , se lee: "o"

$a \vee b$, se lee: "a o b"

\cong , se lee: "es congruente con"

$b \cong b$, se lee: "b es congruente con b"

C) SIGNOS DE AGRUPACIÓN

(): paréntesis

[] : corchetes

{ } : llaves

— : vínculo o barra

VALOR ABSOLUTO Y RELATIVO

A) Valor absoluto o número absoluto, es el valor que denota la figura que representa, independiente del signo.

Ejemplos:

$$|-5| = 5 \quad ; \quad |3| = 3$$

B) Valor relativo o número relativo, es el valor que depende del signo que la acompaña.

Ejemplos:

$$-7 \quad ; \quad +4$$

OPERACIONES FUNDAMENTALES CON LOS NÚMEROS RELATIVOS

A) SUMA

• Suma de dos números positivos:

$$(+5) + (+7) = +5 + 7 = +12$$

• Suma de dos números negativos:

$$(-3) + (-5) = -3 - 5 = -8$$

• Suma de un número positivo y un número negativo:

$$(+7) + (-3) = +7 - 3 = +4$$

$$(-12) + (+2) = -12 + 2 = -10$$

B) SUSTRACCIÓN

• $(+8) - (+4) = +8 - 4 = +4$

• $(-8) - (-13) = -8 + 13 = +5$

• $(-12) - (-8) = -12 + 8 = -4$

C) MULTIPLICACIÓN

• $(+3) (+5) = +15$

• $(-2) (-3) = +6$

• $(+5) (-8) = -40$

• $(-12) (+3) = -36$