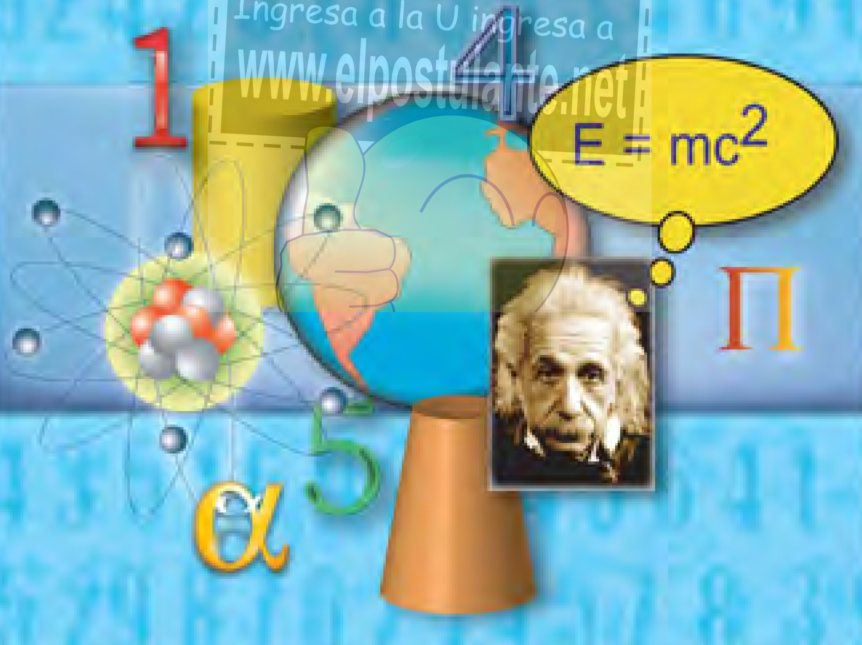
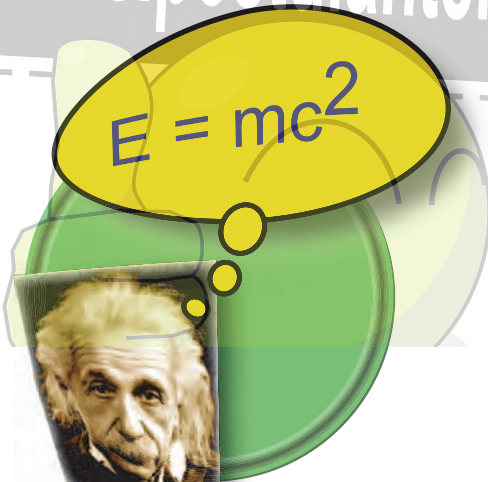
FÓRMULAS MATEMÁTICAS

ÁLGEBRA ARITMÉTICA TRIGONOMETRÍA



GEOMETRÍA FÍSICA QUÍMICA

FÓRMULAS MATEMÁTICAS



LEXUS

FÓRMULAS MATEMÁTICAS

IDEA, DISEÑO Y REALIZACIÓN
Departamento de Creación Editorial de Lexus Editores

Av. Del Ejército 305 Miraflores, Lima-Perú
www.lexuseditores.com

Primera edición, febrero 2008

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca
Nacional del Perú: 2008-01603

ISBN: 978-9972-209-54-3

EDICIÓN 2008

PRESENTACIÓN

Al igual que René Descartes, gran matemático y filósofo del siglo XVII, quien hubiera preferido una ciencia única o “matemática universal”, que explique el *orden* y la *medida* de la naturaleza, sin importar si la unidad de medida son números, o ecuaciones o gráficos, el presente “Formulario Matemático” pretende realizar una exposición de todos los métodos matemáticos en un solo documento.

Como es habitual, Editorial Lexus pone a disposición del estudiante avanzados recursos que contribuirán a minimizar diferencias teóricas y prácticas entre el nivel secundario y la universidad. Se ha pretendido crear un manual educativo para que el alumno en la etapa preuniversitaria, a través de la práctica directa de sus ejercicios, pueda auto-evaluarse y pronosticar sus capacidades con vistas a iniciar sus estudios superiores. Y, al mismo tiempo, servir como obra de consulta general.

La preparación de esta formidable obra ha sido posible debido a la participación de un selecto equipo de estudiantes universitarios y calificados docentes especialistas. Este libro resume más de 4 mil maravillosos años de investigación matemática. Desde las antiguas aritmética y álgebra, escudriñadas por babilonios y egipcios hasta las modernas técnicas y aplicaciones, que permiten actividades cotidianas de complicado análisis, como el pronóstico del tiempo, el movimiento bancario o la telefonía móvil, imposibles sin el concurso de todas las disciplinas matemáticas.

Este manual incluye secciones de Física y Química pues, como señalaba Von Neumann, las matemáticas poseen una doble naturaleza: las matemáticas como cuerpo científico propio, independientes de otros campos, y las matemáticas relacionadas con las ciencias naturales. De hecho, muchos de los mejores resultados alcanzados en las matemáticas modernas han sido motivados por las ciencias naturales y, similarmente, hay una tremenda *matematización* de las partes teóricas de dichas ciencias[1].

El método práctico utilizado en toda la extensión de esta obra, conduce al lector de una manera didáctica a lo largo de la asignatura, pasando de lo más sencillo a lo más complejo, con numerosos ejercicios resueltos y propuestos. La resolución de problemas y el repaso teórico no dudamos que le darán al estudiante una base muy sólida para que destaque en las aulas universitarias de pre-grado o post-grado.

Los Editores

1 Referencias históricas consultadas en: José M. Méndez Pérez. “Las Matemáticas: su Historia, Evolución y Aplicaciones”. Archivo online: http://www.divulgamat.net/weborriak/TestuakOnLine/HasierakoIkasgaiak/Mendez2003-04-extendida.doc.

SUMARIO

Pag.

Álgebra ... 53

Química ... 217

ARITMÉTICA

DEFINICIÓN

Es aquella parte de la matemática pura elemental que se ocupa de la composición y descomposición de la cantidad expresada en números.

Lógica Matemática

DEFINICIÓN

La lógica es la ciencia que estudia los procedimientos para distinguir si un razonamiento es correcto o incorrecto; en este sentido, la LÓGICA MATEMÁTICA analiza los tipos de razonamiento utilizando modelos matemáticos con ayuda de las PROPOSICIONES LÓGICAS.

PROPOSICIONES LÓGICAS

Una proposición lógica es el conjunto de palabras que, encerrando un pensamiento, tiene sentido al AFIRMAR que es VERDADERO o al AFIRMAR que es falso.

Las proposiciones se calsifican en:

1) Simples o Atómicas

2) Compuestas o Moleculares

CONECTIVOS LÓGICOS

Los conectivos lógicos son símbolos que sirven para relacionar o juntar proposiciones simples (atómicas) y formar proposiciones compuestas (moleculares).

CONECTIVO	NOMBRE	EL LENGUAJE COMÚN SE LEE
$\sim$	Negación	no, n es cierto que, no es el caso que, etc.
$\wedge$ ó $\bullet$	Conjunción	y, pero, sin embargo, además, aunque, etc.
$\vee$	Disyunción inclusiva	o, y/o

CONECTIVO	NOMBRE	EL LENGUAJE COMÚN SE LEE
Δ	Disyunción exclusiva	o … o…
$\Rightarrow$	Condiciona	entonces, si … entonces …, dado que … … siempre que …, en vista que …, implica …, etc.
$\Leftrightarrow$	Bicondicional	… si y sólo si …

PROPOSICIONES SIMPLES

Las proposiciones simples o atómicas se representan por las letras p, q, r, s, t, etc. y pueden ser verdaderas o falsas.

Ejemplos:

p: Juan Estudia

q: Andrés es un niño

r: Stéfano no juega fútbol

s: Alejandra está gordita

t: Christian es rubio

u: Alescia habla mucho

PROPOSICIONES COMPUESTAS BÁSICAS

Son las siguientes, formadas a partir de proposiciones simples:

Negación: ~ p Se lee:

"no p", "no es cierto que p", etc.

Conjunción: p ∧ q Se lee:

"p y q", "p pero q", "p sin embargo q", etc.

Disyunción: p ∨ q Se lee:

"p o q" , "p y/o q"

Disyunción Exclusiva: p Δ q Se lee:

"o p o q"

Condicional: p ⇒ q Se lee:

"si p, entonces q", "p implica q", etc.

Bicondicional p ⇔ q Se lee:

"p si, y sólo si q"

TABLAS DE VERDAD DE LAS PROPOSICIONES COMPUESTAS BÁSICAS

NEGACIÒN

p	~ q
V	F
F	V

CONJUNCIÒN

p q	p ∧ q
V V	V
VF	F
FV	F
FF	F

DISYUNCIÓN INCLUSIVA

p q	p ∨ q
VV	V
VF	V
FV	V
FF	F

DISYUNCIÓN EXCLUSIVA

p q	p Δ q
V V	F
VF	V
FV	V
FF	F

CONDICIONAL

p q	p ⇒ q
VV	V
VF	F
FV	V
FF	V

BICONDICIONAL

p q	p ⇔ q
V V	V
VF	F
FV	F
FF	V

TIPOS DE PROPOSICIONES

TAUTOLOGÍA

Es una proposición cuyos VALORES DE VERDAD del OPERADOR PRINCIPAL son TODOS VERDADEROS, cualquiera sea el valor de verdad de sus componentes.

Ejemplo:

p q	p ∧ q	⇒	(p ∨ q)
VV	V	V	V
VF	F	V	V
FV	F	V	V
FF	F	V	F

CONTRADICCIÓN

Es una proposición cuyos VALORES DE VERDAD del OPERADOR PRINCIPAL son TODOS FALSOS, cualquiera que sea el valor de verdad de sus componentes.

Ejemplo:

p q	[~ p	⇒	(q	∧	~ q)]	∧	~ p
VV	F	V	V	F	F	F	F
VF	F	V	F	F	V	F	F
FV	V	F	V	F	F	F	V
FF	V	F	F	F	V	F	V

CONTINGENCIA

No es ni tautología ni contradicción porque los VALORES DE VERDAD de su OPERADOR PRINCIPAL tienen por lo menos una VERDAD y/o una FALSEDAD.

LEYES LÒGICAS PRINCIPALES

1. DE IDENTIDAD:

$$p \Rightarrow p$$
$$p \Leftrightarrow p$$

"Una proposición sólo es idéntica consigo misma".

2. DE CONTRADICCIÓN:

$$\sim (p \wedge \sim p)$$

"Una proposición no puede ser verdadera y falsa a la vez".

3. DEL TERCIO EXCLUÍDO:

$$p \vee \sim q$$

"Una proposición o es verdadera o es falsa, no hay una tercera opción".

4. DE LA DOBLE NEGACIÒN (INVOLUCIÓN):

$$\sim (\sim p) \equiv p$$

"La negación de la negación es una afirmación".

5. DE LA IDEMPOTENCIA:

a) $p \wedge p \wedge p \wedge \ldots \wedge p \equiv p$

b) $p \vee p \vee p \vee \ldots \vee p \equiv p$

"Las variables repetidas redundantemente en una cadena de conjunciones o en una cadena de disyunciones se reemplazan por la sola variable".

6. DE LA CONMUTATIVIDAD:

a) $p \wedge q \equiv q \wedge p$

b) $p \vee q \equiv q \vee p$

c) $p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p$

"En una proposición, la conjunción, la disyunción inclusiva y la bicondicional son conmutativas".

7. DE LA ASOCIATIVIDAD:

a) $p \wedge (q \wedge s) \equiv (p \wedge q) \wedge s$

b) $p \vee (q \vee s) \equiv (p \vee q) \vee s$

c) $p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow s) \equiv (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow s$

"En una proposición, la doble conjunción, la doble disyunción, o la doble bicondicional se asocian indistintamente".

8. DE LA DISTRIBUTIVIDAD:

a) $p \wedge (q \vee s) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge s)$

b) $p \vee (q \wedge s) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee s)$

c) $p \Rightarrow (q \wedge s) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow s)$

d) $p \Rightarrow (q \vee s) \equiv (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow s)$

"En una proposición la conjunción, la disyunción y la implicación son distributivas".

9. DE DE MORGAN:

a) $\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$

b) $\sim (p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

"En una proposición, la negación de una conjunción o de una disyunción son distributivas respecto a la disyunción o conjunción.

10. DEL CONDICIONAL:

a) $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

b) $\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

"En una proposición, la condicional equivale a la disyunción de la negación del antecedente con el consecuente, y la negación de una condicional equivale a una conjunción del antecedente con la negación del consecuente".

11. DEL BICONDICIONAL:

a) $(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

b) $(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \equiv \sim (p \,\Delta\, q)$

12. DE LA ABSORCIÓN:

a) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

b) $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$

c) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

d) $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$

13. DE TRANSPOSICIÓN:

a) $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$

b) $(p \Leftrightarrow q) \equiv (\sim p \Leftrightarrow \sim q)$

14. DE EXPORTACIÓN:

a) $(p \wedge q) \Rightarrow s \equiv p \Rightarrow (q \Rightarrow s)$

b) $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \Rightarrow s$

$\equiv (p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_{n-1}) \Rightarrow (Pn \Rightarrow s)$

15. MODUS PONENS:

$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$

"En una premisa condicional; si se afirma el antecedente, entonces se concluye en la afirmación del consecuente".

16. MODUS TOLLENS:

$[(p \Rightarrow q) \wedge \sim p] \Rightarrow \sim p$

"En una proposición, si se niega el consecuente de una premisa condicional entonces se concluye en la negación del antecedente".

17. DEL SILOGISMO DISYUNTIVO:

$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$

"En una proposición, cuando se niega el antecedente de la premisa de una disyunción, se concluye en la afirmación del consecuente".

18. DE LA INFERENCIA EQUIVALENTE:

$[(p \Leftrightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$

"En una proposición, cuando se afirma que uno de los miembros de una bicondicional es verdadera, entonces el otro miembro también es verdadero".

19. DEL SILOGISMO HIPOTÉTICO:

$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow s)] \Rightarrow (p \Rightarrow s)$

"En una proposición, el condicional es transitivo".

20. DE LA TRANSITIVIDAD SIMÉTRICA:

$[(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow s)] \Rightarrow (p \Leftrightarrow s)$

"En una proposición, el bicondicional es transitivo".

21. DE LA SIMPLIFICACIÓN:

$(p \wedge q) \Rightarrow p$

"En una proposición, si el antecedente y consecuente de una conjunción son verdades, entonces cualquiera de los dos términos es verdad".

22. DE ADICIÓN:

$p \Rightarrow (p \vee q)$

"En una proposición, una disyunción está implicada por cualquiera de sus dos miembros.

TEORÍA DE CONJUNTOS

CONCEPTOS BÁSICOS

DEFINICIÓN DE CONJUNTO

Se entiende por conjunto a la colección, agrupación o reunión de un todo único de objetos definidos, distinguiles por nuestra percepción o nuestro pensamiento y a los cuales se les llama **elementos**. Ejemplo: los muebles de una casa. Los muebles son los elementos que forma el conjunto.

FORMAS DE EXPRESAR UN CONJUNTO

a) Por extensión.- Cuando el conjunto indica explícitamente los elementos del conjunto. También se llama forma constructiva.

Ejemplos:

i) $A = \{a, b, c, d\}$

ii) $\mathbb{Z} = \{\dots ; -3; -2; -1; -0; 1; 2; \dots \}$

b) Por comprensión.- Cuando los elementos del conjunto pueden expresarse por una propiedad común a todos ellos. También se le llama forma simbólica.

Ejemplos:

i) $M = \{x/x = \text{vocal}\}$

Se lee:

"M es el conjunto de las x, donde x es una vocal".

ii) $B = \{x\ e\ \mathbb{Z} / -2 < x < 3\}$

Se lee:

"B es el conjunto de las x que pertenecen a los números enteros, donde x es mayor que -2 pero menor que 3".

PRINCIPALES SÍMBOLOS

Símbolo	Lectura	Símbolo	Lectura
$\in$	… pertenece…	$\exists$	existe…
$\notin$	… no pertenece…	$\exists!$	existe un … sólo un …
ϕ	Conjunto vacío	$\nexists$	no existe
$\equiv$	… equivalente…	η	cardinal de…
$\neq$	… diferente…	$\Rightarrow$	implica; entonces…
$\subset$	… está incluido	$\Leftrightarrow$	… si y sólo si…
$\subseteq$	… está incluido estrictamente	$\mathcal{S}$	conjunto de partes de…
$\not\subset$	… no está incluido…	P	potencial del …
$\cup$	… unión…	$\wedge$	… y …
$\cap$	… intersección…	$\vee$	… o …
/	… tal que …	$\triangle$	o … o …
$\sim$	… es coordinable…	A'	Complemento de A con Respecto al conjunto Universal $\mathbb{U}$
$\nsim$	… no es coordinable…	$<$	… es menor que …
$\mathbb{U}$	Conjunto Universal	$>$	… es mayor que …
Δ	… diferencia simétrica…	$\leq$	… es menor o igual que …
$\forall$	Para todo	$\geq$	… es mayor o igual que …

NOTACIÓN DE LOS CONJUNTOS NUMÉRICOS

$\mathbb{N}$: Conjunto de los números naturales

$$\mathbb{N} = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ldots\}$$

$\mathbb{Z}$: Conjunto de los números entero

$$\mathbb{Z} = \{\ldots;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots\}$$

$\mathbb{Z}^+$: Conjunto de los números enteros positivos

$\mathbb{Z}^-$: Conjunto de los números enteros negativos

$\mathbb{Z}^*$: Conjunto de los números enteros no nulos

$\mathbb{Q}$: Conjunto de los números racionales (decimales finitos o infinitos periódicos)

$$\mathbb{Q} = \left\{x/x = \frac{a}{b}\ ;\ a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0\right\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{\ldots;\ \frac{5}{8}\ ;\ \frac{7}{2}\ ;\ -8;\ +3;\ -\frac{6}{5}\ ;\ldots\right\}$$

$\mathbb{I}$: Conjunto de números irracionales (decimales infinitos no periódicos)

$$\mathbb{I} = \mathbb{Q}' = \{x/x \text{ es número no racional}\}$$

$$\mathbb{I} = \left\{\ldots;\ \sqrt{30}\ ;\ \sqrt{2}\ ;\ \sqrt{3}\ ;\ +e\ ;\ \pi;\ldots\right\}$$

$\mathbb{R}$: Conjunto de los números reales

$$\mathbb{R} = \{x/x \in \mathbb{Q} \vee x \in \mathbb{I}\}$$

$$\mathbb{R} = \left\{\ldots;\ \frac{8}{3}\ ;\ -\frac{4}{13}\ ;\ \sqrt{5}\ ;\ 3;\ -\sqrt{\frac{5}{4}}\ ;\ldots\right\}$$

$\mathbb{C}$: Conjunto de los números complejos

$$\mathbb{C} = \{\mathbb{R} \wedge \sim\mathbb{R}\}$$

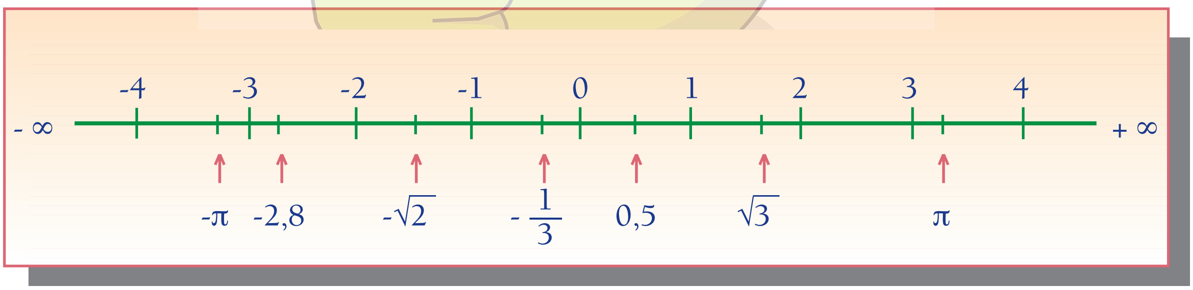
$$\mathbb{C} = \left\{\ldots;\ -8;\ \sqrt{7}\ ;\ 3;\ 5i;\ i\sqrt{3}\ ;\ -\frac{5}{9}\ ;\ldots\right\}$$

LA RECTA REAL

El conjunto de los números reales está formado por todos los conjuntos numéricos. Todos los números:

Naturales, Enteros, Racionales e Irracionales se pueden representar sobre una recta, desde el cero a + ∞ y desde cero a - ∞ . A esta recta se le llama "Recta real" o "Recta numérica".

Cualquier número real se puede representar sobre un punto de la Recta Real, porque tiene infinitos puntos.



CARACTERÍSTICAS DE LOS CONJUNTOS

1) PERTENENCIA $\in$ Y NO PERTENENCIA "$\notin$"

Sea : $A = \{a, b, c, d, e\}$

: $B = \{a, b, c\}$

: $C = \{m, n, q, r, s\}$

Entonces: $B \in A$, se lee:

"B pertenece a A"

$C \notin A$, se lee:

"C no pertenece a A"

2) CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS

Finitos:

Cuando los elementos del conjunto se puede contar.

$A = \{m, n, q, r\}$;

Son 4 elementos.

Infinitos:

Cuando los elementos del conjunto son tantos que no se puede contar.

$M = \{\text{estrellas del firmamento}\}$; son infinitas

$N = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; \ldots; \infty\}$;Infinitos números

3) CONJUNTOS IGUALES

Dos conjuntos son iguales cuando tienen exactamente los mismos elementos aunque no estén en el mismo orden.

$A = \{4; 5; 6; 7; 8\}$

$B = \{5; 6; 4; 8; 7\}$

Entonces: $A = B$

4) CONJUNTO VACÍO

Es el conjunto que carece de elementos.

$A = \phi$; $A = \{\ \}$; $A = 0$

5) CONJUNTO UNITARIO

Es el conjunto que tiene un solo elemento.

$M = \{3\}$; $Q = \{0\}$

$X = \{y/2y = 4\}$

6) CONJUNTO UNIVERSAL

Es el conjunto que contiene a todos los elementos de otro conjunto.

$\mathbb{U} = \{\text{todas las vocales}\}$

$A = \{e; i; o\}$

Entonces $\mathbb{U}$ es el conjunto universal de A.

7) SUBCONJUNTO

$A = \{m; n; p\}$

$B = \{q; m; n; r; p\}$

Se lee " A es subconjunto de B" o "A está incluido en B".

RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

CONJUNTO DE CONJUNTO O CONJUNTO DE PARTES

Es el conjunto formado por la totalidad de subconjuntos que se puede formar a partir de un conjunto dado.

Sea el conjunto:

$M = \{m; n; p\}$

El conjunto de partes es:

$$\mathcal{S}(M) = \{\phi, \{m\}, \{n\}, \{p\}, \{m, n\}, \{m, p\}, \{n, p\}, \{m, n, p\}\}$$

POTENCIA DE UN CONJUNTO

Expresa el número de subconjuntos que se puede formar con los elementos de un conjunto. En otras palabras, es el número de elementos de un conjunto de partes.

$$P(M) = 2^n$$

N = número de elementos del conjunto M.

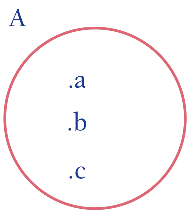
Para el ejemplo anterior:

$n = 3$, luego:

$P(M) = 2^3 = 8$

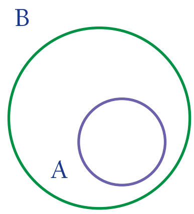
DIAGRAMAS DE VENN

Son gráficos, generalmente círculos, que sirven para encerrar y representar conjuntos:



A = {a, b, c}

Conjunto A



A ⊂ B

"A está incluído en B"

A ⊄ B

"A no está incluido en B"

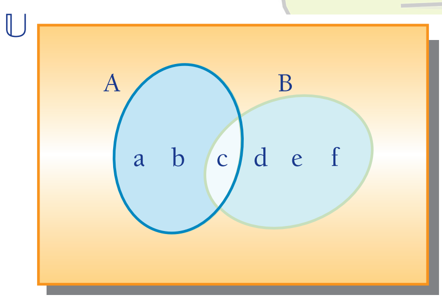
OPERACIONES CON CONJUNTOS

1) UNIÓN DE CONJUNTOS

La unión de dos conjuntos A y B, es el conjunto formado por todos los elementos de los conjuntos A y B.

Sean: A = { a, b, c }

B = { c, d, e, f }



A ∪ B = { a, b, c, d, f }

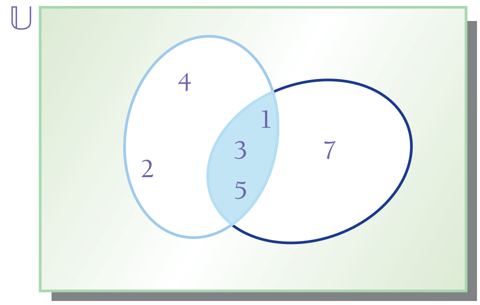
Se lee: "A unión B".

2) INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

La intersección de los conjuntos A y B, es el conjunto que contiene elementos comunes a los conjuntos A y B.

Sean: A = { 1; 2; 3; 4; 5 }

B = { 1; 3; 5; 7 }



A ∩ B = { 1; 3; 5 }

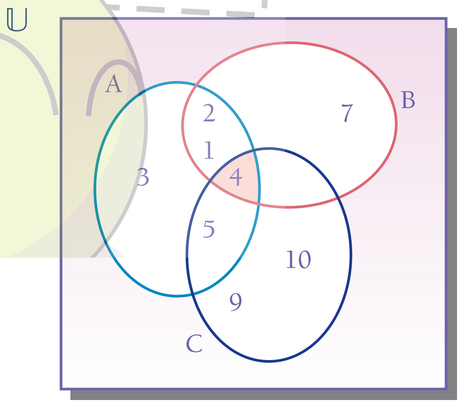
Se lee: "A intersección B".

La intersección de varios conjuntos:

Sean: A = { 1; 2; 3; 4; 5 }

B = { 1; 2; 4; 7}

C = { 4; 5; 9; 10 }



A ∩ B ∩ C = {4}

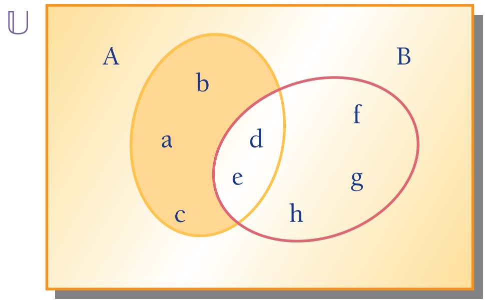
Se lee "A intersección B intersección C".

3) DIFERENCIA DE CONJUNTOS

La diferencia de dos conjuntos, A menos B, es el conjunto formado por elementos de A que no pertenezcan a B.

Sean: A = { a, b, c, d, e }

B = { d, e, f, g, h }



A - B = { a, b, c }

Se lee: "El conjunto A menos el conjunto B, es el conjunto a, b, c".

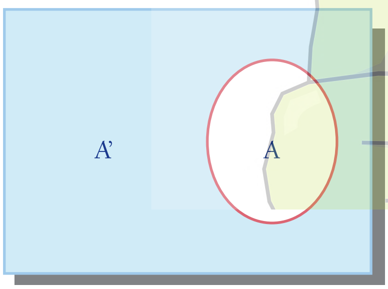
4) COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO

Sean los conjuntos A y universal 𝕌. El complemento del conjunto A es la parte del conjunto universal 𝕌 que no pertenece al conjunto A.

Sean:

A = { vocales }

𝕌 = { el alfabeto }



A' = 𝕌 - A = { las consonantes }

Se lee: "A' es el complemento de A".

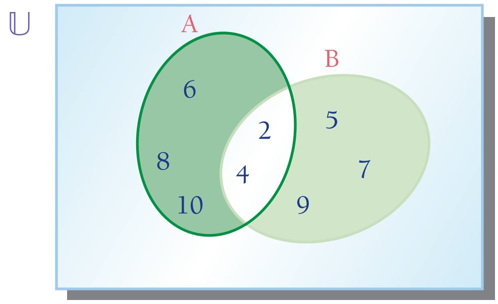
5) DIFERENCIA SIMÉTRICA

Es el conjunto formado por la parte no común de dos conjuntos.

A = { 2; 4; 6; 8; 10 }

B = { 2; 4; 5; 7; 9 }

$A \,\Delta\, B = (A \cup B) - (A \cap B)$



$A \,\Delta\, B$ = { 5; 6; 7; 8; 9; 10 }

Se lee: "A diferencia simétrica B"

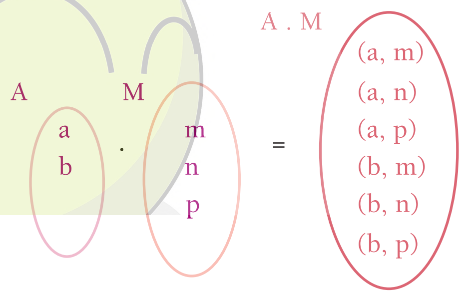
PRODUCTO CARTESIANO DE DOS CONJUNTOS

Dados dos conjuntos A y B, se llama producto cartesiano A . B, al conjunto de "pares ordenados" formados por todos los elementos de A, como primeros componentes, asociados a todos los elementos de B como segundos elementos.

Sean:

A = { a, b }

M = { m, n, p }



A . M = { (a, m), (a, n), (a, p), (b, m), (b, n), (b, p)}

Simbólicamente:

$A . M = \{(x, y)/x \in A \wedge y \in M\}$

Nota: $A . M \neq M . A$ (no es conmutativo)

RELACIONES

DEFINICIÓN

Relación es un subconjunto de pares ordenados de dos conjuntos A y B que obedecen a una proposición establecida.

Ejemplo:

Sean los conjuntos:

$$A = \{ a, b \}$$

$$M = \{ m, n, p\}$$

Se denota:

$$a \; \Re \; m \quad ó \quad (a, m) \in \Re$$

y se lee:

" a está relacionada con m por $\Re$".

Simbólicamente:

$\Re$ es una relación de A en M $\Leftrightarrow R \subset A \,.\, M$

y se lee:

"$\Re$ es una relación de A en M, si y solamente si la relación $\Re$ es un subconjunto de A . M".

Ejemplo: $A = \{ 2; 4; 6; 8; 10 \}$

$B = \{ 1; 2; 3; 4 \}$

Sea la propiedad: $x \in A \;\wedge\; y \in B$

Que obedezca a la proposición $P(x)$: $x < y$

entonces:

$$2 \; \Re \; 3$$

$$2 \; \Re \; 4$$

Sólo se puede escribir estas dos relaciones porque son las únicas que cumplen que $x < y$, que es la proposición $P(x)$ que los relaciona.

DOMINIO Y RANGO

DOMINIO

Es el conjunto formado por los primeros componentes de los pares ordenados que forman la relación $\Re$.

Se denota: Dom ($\Re$)

En el ejemplo anterior:

$$\text{Dom } (\Re) = \{2\}$$

RANGO

Es el conjunto formado por los segundos componentes de los pares ordenados que forman la relación $\Re$.

Se denota: Ran ($\Re$)

En el ejemplo anterior:

Ran ($\Re$) = { 3; 4}

TIPOS DE RELACIONES EN UN CONJUNTO

1) REFLEXIVA

Cuando todos los elementos de un conjunto A están relacionados consigo mismos a través de $\Re$.

$$\Re \text{ es reflexiva} \Leftrightarrow (a, a) \in \forall \; \Re \quad a \in A$$

Ejemplo:

$$A = \{ a, b, c\}$$

Relación Reflexiva:

$$\Re = \{(a, a); (b, b); (c, c)\}$$

2) SIMÉTRICA

Cuando cada uno de los elementos de un conjunto A está relacionado con otro del mismo conjunto y éste a su vez está relacionado con el primero.

$$\Re \text{ es simétrica} \Leftrightarrow (a, b) \in \Re \Rightarrow (b, a) \in \Re$$

Ejemplo:

$$A = \{a, b, c\}$$

Relación simétrica:

$$\Re = \{(a, b); (b, a); (a, c); (c, a); (b, c); (c, b)\}$$

3) TRANSITIVA

Cuando un elemento de un conjunto A está relacionado con otro elemento del mismo conjunto y esté a su vez está relacionado con uno tercero del mismo conjunto; entonces, el primero está relacionado con el tercero a través de la relación R.

$$\Re \text{ es transitiva} \Leftrightarrow (a, b) \in \Re \wedge (b, c) \in \Re$$
$$\Rightarrow (a, c) \in \Re$$

Ejemplo:

$$A = \{ a, b, c \}$$

Relación Transitiva:

$$\Re = \{(a, b); (b, c); (a, c)\}$$

RELACIÓN DE EQUIVALENCIA

La relación $\Re$ de A en A es una relación de EQUIVALENCIA, cuando esta relación es reflexiva, simétrica y transitiva a la vez.

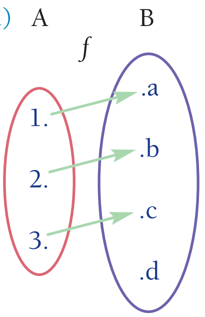
FUNCIONES

DEFINICIÓN

Una función de A en B es una relación de par ordenado que asocia a TODO ELEMENTO del conjunto A con UN SOLO ELEMENTO del conjunto B.

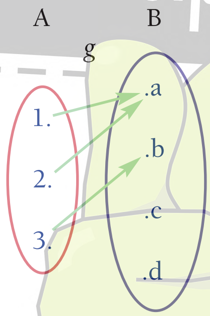
Se denota: $f : A \Rightarrow B$

Ejemplos:

i)


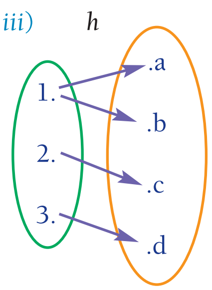
f es una función y se denota

$f = \{(1,a), (2,b), (3,c)\}$

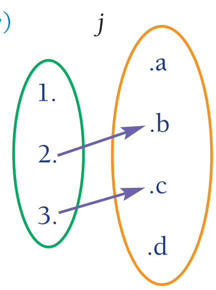
ii)


g es una función y se denota

$g = \{(1,a), (2,a), (3,b)\}$

iii)


h No es una función porque No cumple: "a todo elemento de A le corresponde UN SOLO elemento de B"

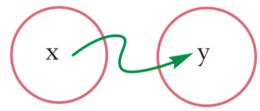
iv)


j NO es una función porque No cumple: "a TODO elemento de A

En general una función de denota así:

$$f(x) = y$$

Donde "x" es un elemento de A, e "y" es un elemento de B.

$x \in A$


$y \in B \equiv f(x) \in B$

DOMINIO Y RANGO

DOMINIO

Es el conjunto de todas las PRIMERAS componentes del par ordenado que pertenecen a una función "*f*".

RANGO

Es el conjunto de todas las SEGUNDAS componentes del par ordenado que pertenecen a una función "*f*".

Ejemplo:

Sea: $f = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$

$$\text{Dom}(f) = \{1; 2; 3\}$$

$$\text{Ran}(f) = \{ a, b, c\}$$

SISTEMAS DE NUMERACIÓN

NUMERACIÓN

DEFINICIÓN

Es la parte de la Aritmética que estudia las leyes, artificios y convencionalismos utilizados para expresar (hablar) y representar (escribir) a los números en forma sistemática y lo más simple posible.

SISTEMAS DE NUMERACIÓN

Se refiere a los conjuntos de reglas, leyes, artificios y convenios que permiten formar, expresar y representar todos los números.

BASE DE UN SISTEMA

Es aquel número que indica la cantidad de unidades de un orden cualquiera que se requiere para formar una unidad de un orden inmediato superior. Así, nuestro sistema se llama DECIMAL porque con 10 UNIDADES de un orden cualquiera, se logra formar una unidad de un orden inmediato superior.

FORMACIÓN DE UN SISTEMA DE NUMERACIÓN

PRINCIPIO BÁSICO

En un sistema de base N, toda cifra escrita un lugar a la izquierda de otra, representa unidades de orden N veces mayor al orden que representa la otra, escrita a la derecha.

Ejemplo:

Sea el número 468 en base N = 10, el 4 es de orden 10 veces mayor que cada unidad de 60 y cada unidad de 6 es de orden 10 veces mayor que cada unidad de 8.

DESCOMPOSICIÓN POLINÓMICA DE UN NÚMERO

Es el procedimiento de cálculo que permite determinar la cantidad de unidades simples que posee un número y con ello su valor real.

Sea el número $\overline{a\,b\,c\,d}$ de base N:

$\overline{a\ b\ c\ d}_{(N)}$

- d → Unidades de 1° orden.
- c → Unidades de 2° orden (N veces las u.s.)
- b → Unidades de 3° orden (N^2 veces las u.s.)
- a → Unidades de 4° orden (N^3 veces las u.s.)

Donde: u.s. = unidades simples

MÉTODO PRÁCTICO PARA DESCOMPONER UN NÚMERO EN SU FORMA POLINÓMICA

"Se toma la primera cifra de la izquierda y se multiplica por la base del sistema elevado a un exponente igual al número de cifras que le siguen a la cifra tomada, a este resultado se le suma el producto de la segunda cifra multiplicada por la base del sistema elevada a un exponente igual al número de cifras que le siguen y así sucesivamente".

$$\overline{a\,b\,c}_{(N)} \Rightarrow a\,.\,N^2 + b\,.\,N + c$$

$$\overline{a\,b\,c\,d\,e}_{(N)} \Rightarrow a\,.\,N^4 + b\,.\,N^3 + c\,.\,N^2 + d\,.\,N + e$$

$$\underbrace{\overline{ab\ldots xyz}}_{\text{"m" cifras}}{}_{(N)} \Rightarrow a\,.\,N^{m-1} + b\,.\,N^{m-2} + \ldots\, x\,.\,N^2 + y\,N + z$$

CONVENCIÓN

Cuando la base es superior a 10, y los números 10; 11; 12 y 13 sean cifras, se emplea la siguiente equivalencia:

$$\alpha = 10 \;;\; \beta = 11 \;;\; \gamma = 12 \;;\; \& = 13$$

CIFRAS MÍNIMAS

Son todas las cifras menores o iguales a la mitad de la base del número dado.

Ejemplos de cifras mínimas:

De base 4: 0; 1; 2;

De base 7: 0; 1; 2; 3;

De base 10: 0; 1; 2; 3; 4, 5

De base 11: 0; 1; 2; 3, 4; 5

De base 12: 0; 1; 2; 3, 4; 5; 6

Ejemplo:

Escribir el número $67\,654_{(8)}$ en cifras mínimas. Las cifras mínimas de este número son: 0; 1; 2; 3; 4.

$4 = 4$

$5 - 8 = \overline{3}$

$6 + 1 = 7 \quad ; \quad 7 - 8 = \overline{1}$

$7 + 1 = 8 \quad ; \quad 8 - 8 = 0$

$6 + 1 = 7 \quad ; \quad 7 - 8 = \overline{1}$

$0 + 1 = 1$

$$\therefore \quad 67\,654_{(8)} = 1\,\overline{1}\,0\,\overline{1}\,\overline{3}\,4$$

OPERACIONES ARITMÉTICAS BÁSICAS NO DECIMALES

SUMA

Tal como en el sistema decimal, si la suma parcial supera el valor de la base, se ecribe el valor numérico de lo que excede a la base y se lleva como unidades tantas veces como excede al valor de la base.

Ejemplo:

$$423_{(7)} + 566_{(7)} + 2521_{(7)}$$

$$\begin{array}{r} 4\,2\,3 \; + \\ 5\,6\,6 \\ 2\,5\,2\,1 \\ \hline 4\,1\,4\,3_{(7)} \end{array}$$

lo cual se desarrolló de la siguiente manera:

$$3 + 6 + 1 = 10$$

como 10 = 7 + 3; se pone 3 y se lleva 1.

$$1 + 2 + 6 + 2 = 11$$

como 11 = 7 + 4 ; se pone 4, se lleva 1.

$$1 + 4 + 5 + 5 = 15$$

como 15 = 14 + 1; 15 = 2 . 7 + 1; se pone 1, se lleva 2

$$2 + 2 = 4$$

RESTA

El método es similar a la resta en base 10. Cuando la base es otra, se añade como unidad el valor de la base.

Ejemplo: $4\,7\,3\,5_{(8)} - 2\,3\,6\,7_{(8)}$

$$\begin{array}{r} 4\,7\,3\,5 \; - \\ 2\,3\,6\,7_{(8)} \\ \hline 2\,3\,4\,6_{(8)} \end{array}$$

Desarrollo:

5 - 7 no se puede restar, entonces, en la segunda columna tomamos prestada 1 unidad a 3, lo que nos permite añadir a 5 el valor de la base:

$$(5 + 8) - 7 = 6$$

Como a 3 se quitó 1 unidad, ahora es 2, pero 2 - 6 no se puede restar, entonces:

$$(2 + 8) - 6 = 4$$

Como a 7 se le había quitado 1 unidad, ahora es 6:

$$6 - 3 = 3$$

Ahora no se ha quitado nada.

Finalmente:

$$4 - 2 = 2$$

MULTIPLICACIÓN

El procedimiento es similar a la multiplicación en base 10; sólo que lo que se lleva es la unidad de la base de los factores.

Ejemplo:

$$326_{(7)} \,.\, 465_{(7)}$$

$$\begin{array}{r} 3\,2\,6 \; \times \\ 4\,6\,5 \\ \hline 2\,3\,0\,2 \\ 2\,6\,3\,1\;\; \\ 1\,6\,4\,3\;\;\;\; \\ \hline 2\,2\,6\,2\,1\,2_{(7)} \end{array}$$

Desarrollo:

5 . 6 = 30 = 4 . 7 + 2	pongo 2 van 4
5 . 2 + 4 = 14 = 2 . 7 + 0	pongo 0 van 2
5 . 3 + 2 = 17 = 2 . 7 + 3	pongo 3 van 2
Finalmente:	pongo 2.
6 . 6 = 36 = 5 . 7 + 1	pongo 1 van 5
6 . 2 + 5 = 17 = 2 . 7 + 3	pongo 3 van 2
6 . 3 + 2 = 20 = 2 . 7 + 6	pongo 6 van 2
Finalmente:	pongo 2
4 . 6 = 24 = 3 . 7 + 3	pongo 3 van 3
4 . 2 + 3 = 11 = 1 . 7 + 4	pongo 4 van 1
4 . 3 + 1 = 13 = 1 . 7 + 6	pongo 6 van 1
Finalmente:	pongo 1

Luego, se suma los productos parciales, recordando cómo se suma cuando los sumandos no son de base 10.

DIVISIÓN

Para hacer la división es aconsejable formar una tabla con la base dada, con todos los productos posibles del divisor por el cociente.

Ejemplo: $4\,350_{(6)} \div 24_{(6)}$

Las cifras del cociente, por ser de base 6, oscilan entre 0 y 5, lo cual se toma en cuenta para formar la tabla:

Tabla de base 6

$0 \,.\, 24 = 0$

$1 \,.\, 24 = 24$

$2 \,.\, 24 = 52$

$3 \,.\, 24 = 120$

$4 \,.\, 24 = 144$

$5 \,.\, 24 = 212$

$$\begin{array}{r|l} 4\,3\,5\,0 & 2\,4 \\ \cline{2-2} 2\,4 & 1\,4\,2_{(6)} \\ \cline{1-1} 1\,5\,5 & \\ 1\,4\,4 & \\ \cline{1-1} 1\,1\,0 & \\ 5\,2 & \\ \cline{1-1} 1\,4 & \end{array}$$

CAMBIOS DE BASE DE UN SISTEMA DE NUMERACIÓN

1° UN NÚMERO DE CUALQUIER BASE PASAR A BASE 10

Regla:

Se descompone polinómicamente el número dado. El número que resulta de sumar las unidades simples (u.s.) de este número es el número de base 10.

Ejemplo:

Pasar $3\,856_{(9)}$ a base 10.

Se descompone polinómicamente y se suma:

$$3 \,.\, 9^3 + 8 \,.\, 9^2 + 5 \,.\, 9 + 6 = 2\,886 \text{ u. s.}$$

$$3\,856_{(9)} = 2\,886_{(10)} = 2\,886$$

Nota.-
Que cuando el número es de base 10 no es necesario señalar la base.

2° UN NÚMERO DE BASE 10 PASAR A OTRO SISTEMA DE BASE "N"

Regla:

Se divide el número dado entre el valor "N" de la base deseada, lo cual arroja un cociente. Este cociente se divide nuevamente entre el valor "N", sucesivamente hasta obtener un último cociente cuyo valor sea menor a la base. Luego, tomando la cifra del último cociente y las cifras de los residuos en el orden del último al primero, queda formado el número de base "N".

Ejemplo:

Pasar 4 975 de base 10 a base 8.

$$\begin{array}{rrrrr} 4\,9\,7\,5 & \underline{|\,8} & & & \\ 1\,7 & 6\,2\,1 & \underline{|\,8} & & \\ 1\,5 & 6\,1 & 7\,7 & \underline{|\,8} & \\ 7 & 5 & 5 & 9 & \underline{|\,8} \\ & & & 1 & 1 \end{array}$$

$\therefore \qquad 4\,975_{(10)} = 11\,557_{(8)}$

3° DE UN NÚMERO NO DECIMAL A OTRO NO DECIMAL

Regla:

El primero se pasa a base 10 y luego, el nuevo número, a la base pedida.

Ejemplo:

Pasar el número $2\,583_{(9)}$ a base 5.

A base 10:

$$2 \,.\, 9^3 + 5 \,.\, 9^2 + 8 \,.\, 9 + 3 = 1\,938$$

Ahora, 1 938 se cambia a base 5:

```
1 9 3 8 | 5
  4 3     3 8 7 | 5
    3 8     3 7   7 7 | 5
     (3)      (2)  (2)7   1 5 | 5
                    (2)   (0)  (3)
```

$\therefore \qquad 2\,583_{(9)} = 30\,223_{(5)}$

CONTEO DE CIFRAS AL ESCRIBIR LA SERIE NATURAL

EN BASE 10

> # de cifras = (# mayor + 1) (# cifras del # mayor) – (número con tantos 1 como cifras tenga el # mayor)

Ejemplos:

¿Cuántas cifras se emplea para escribir la serie natural de los números hasta el 3 475?

Solución:

de cifras = (3 475 + 1) (4) – (1 111)

de cifras = 3 4 76 . 4 – 1 111

de cifras = 13 904 – 1 111 = 12 793

¿Cuántas cifras se ha empleado para escribir la serie natural de los números hasta 15 497?

Solución:

de cifras = (15 497 + 1) (5) – 11 111

de cifras = 15 498 . 5 – 11 111

de cifras = 66 379

EN BASE N:

> # de cifras =
> $$(\#\text{ mayor} + 1)(\#\text{ cifras del }\#\text{ mayor}) - \left[\frac{n^k - 1}{n - 1}\right]$$

k = # de cifras del número mayor

n = base del sistema

Ejemplo:

¿Cuántas cifras se ha empleado para escribir hasta el número $8\,427_{(9)}$?

Solución:

$$8\,427_{(9)} = 6\,181$$

$$\#\text{ de cifras} = \left[(6\,181 + 1)\,.\,4 - \frac{9^4 - 1}{9 - 1}\right]$$

de cifrras = 23 908

CÁLCULO DE LA CANTIDAD DE NÚMEROS DE “n” CIFRAS, EN BASE “A”

Consiste en darle a cada cifra el número de valores que puede asumir. El producto de estos valores nos dá el número de combinaciones que a su vez es el número de números de “n” cifras.

> $\#\text{ de números} = (\text{base} - 1)(\text{base} - 1)^{(n-1)}$

Observar que:

“n” es el número de ciras, pero cuando las cifra se repiten, esa cifra se toma una sola vez.

Ejemplo:

¿Cuántos números de la forma $\overline{a\,b\,b}_{(12)}$ existen?

Solución: $\overline{a\,b\,b}$

Tiene 1 cifra repetida y distinta a la primera cifra.

Por lo tanto:

$$\#\text{ de cifras} = (12 - 1)\,(12 - 1)^{(2-1)} = 121$$

SUMATORIA DE PRIMEROS NÚMEROS DE LA SERIA NATURAL EN BASE 10

1) Suma de los “n” primeros números consecutivos de la serie natural.

$$S_C = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 2) + (n - 1) + n$$

$$\boxed{S_C = \frac{n(n + 1)}{2}}$$

2) Suma de los “n” primeros números impares consecutivos de la serie natural de los números.

$$S_I = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 3) + (2n - 1)$$

$$\boxed{S_I = n^2}$$

3) Suma de los "n" primeros números pares consecutivos de la serie natural de los números.

$$S_p = 2 + 4 + 6 + \ldots + (2n - 4) + (2n - 2) + 2n$$

$$\boxed{S_p = n(n + 1)}$$

OPERACIONES BÁSICAS SOBRE NÚMEROS REALES

SUMA O ADICIÓN

1) LEY CONMUTATIVA

En una suma, el orden de los sumandos no altera la suma total. Así:

$$a + b + c = c + a + b = S$$

Ejemplo:

$$4 + 9 + 12 = 12 + 4 + 9 = 25$$

2) LEY ASOCIATIVA

En una suma de varios sumandos, dos o más de ellos pueden ser sustituidos por su suma parcial y la suma total no se altera.

$$a + b + c = (a + b) + c = S$$

Ejemplo:

$$6 + 8 + 3 + 11 = 14 + 3 + 11 = 28$$

3) LEY DE UNIFORMIDAD

Si se suma miembro a miembro dos o más igualdades, el resultado es otra igualdad.

$$\begin{array}{rcl} a + c &=& m \\ b + d &=& n \\ r + p &=& h \\ \hline S &=& S \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 5 + 3 &=& 8 \\ 6 + 9 &=& 15 \\ 8 + 10 &=& 18 \\ \hline 41 &=& 41 \end{array}$$

4) LEY DE MONOTONÍA

a) Si se suma miembro a miembro igualdades con desigualdades del mismo sentido, el resutlado es una desigualdad cuyo sentido es el mismo que el de las desigualdades.

Ejemplo:

$$\begin{array}{rcl} 6 &=& 6 \\ 5 &=& 5 \\ 9 &>& 4 \\ 13 &>& 11 \\ \hline 33 &>& 26 \end{array}$$

Resultado $33 > 26$

b) Si se suma miembro a miembro dos o más desigualdades del mismo sentido, el resutlado es otra desigualdad del mismo sentido que las anteriores.

Ejemplo:

$$\begin{array}{rcl} 5 &<& 8 \\ 6 &<& 9 \\ 18 &<& 60 \\ \hline 29 &>& 77 \end{array}$$

Resultado $29 > 77$

RESTA O SUSTRACCIÓN

Forma general:

$$\boxed{M - S = D}$$

Donde, los términos son:

M = minuendo

S = sustraendo

D = diferencia

VARIACIONES DE LOS TÉRMINOS DE LA RESTA

1) Si al minuendo se le suma o se le resta un número cualquiera sin alterar el sustraendo, entonces la diferencia queda aumentada o disminuida, respectivamente, en dicha cantidad.

$$\boxed{(M \pm n) - S = D \pm n}$$

2) Si al sustraendo se le suma o se le resta un número cualquiera, sin alterar el minuendo entonces la diferencia queda disminuida o aumentada, respectivamente, en dicha cantidad.

$$\boxed{M - (S \pm n) = D \mp n}$$

3) Si al minuendo y sustraendo se le suma o se le resta un mismo número, la diferencia no se altera.

$$\boxed{(M \pm n) - (S \pm n) = D}$$

COMPLEMENTO ARITMÉTICO "C.A."

C.A. de un número es otro número equivalente a lo que le falta al primero para ser igual a la unidad decimal de orden inmediato superior.

Ejemplo:

C.A. de 0,03 es 0,07 porque 0,1 - 0,03 es 0,07

C.A. de 6 es 4 porque 10 - 6 es 4

C.A. de 367 es 633 porque 1 000 - 367 es 633

LA MULTIPLICACIÓN

1) LEY CONMUTATIVA

El orden de los factores no altera el producto.

$$\boxed{a \,.\, b = b \,.\, a = P}$$

Ejemplo:

$$7 \,.\, 4 = 4 \,.\, 7 = 28$$

2) LEY DISTRIBUTIVA RESPECTO A LA SUMA

El producto de un factor por la suma indicada de dos o más sumandos es giual a la suma de los productos del factor por cada sumando.

$$\boxed{a(n + m) = a \,.\, n + a \,.\, m = P}$$

Ejemplo:

$$5(8 + 3) = 5 \,.\, 8 + 5 \,.\, 3 = 55$$

3)LEY DISTRIBUTIVA RESPECTO A LA RESTA

El producto de un factor por una resta indicada es igual a la diferencia del producto del factor por el minuendo menos el producto del factor por el sustraendo.

$$a(n - m) = a.\, n - a \,.\, m = P$$

Ejemplo:

$$5(8 - 3) = 5 \,.\, 8 - 5 \,.\, 3 = 25$$

4) LEY DE UNIFORMIDAD

Si se multiplica miembro a miembro dos igualdades, el resultado es otra igualdad.

$$\begin{array}{c} a = b \\ \underline{m = n} \\ a \,.\, m = b \,.\, n \end{array}$$

5) LEY DE MONOTONÍA

Si se multiplica miembro a miembro igualdades con desigualdades del mismo sentido, el resultado es otra desigualdad del mismo sentido que las anteriores.

Ejemplo:

$$\begin{array}{lc} & 3 = 3 \\ & 5 > 2 \\ & \underline{3 > 1} \\ \text{Multiplicando} & 45 > 6 \end{array}$$

Si se multiplica miembro a miembro desigualdades del mismo sentido, el resultado es otra desigualdad del mismo sentido que las anteriores.

Ejemplo:

$$\begin{array}{lc} & 3 < 5 \\ & 8 < 9 \\ & \underline{2 < 7} \\ \text{Multiplicando} & 48 < 315 \end{array}$$

PROPIEDAD FUNDAMENTAL DEL NÚMERO ENTERO

$$\boxed{10^{n-1} \leq N < 10^n}$$

N = número entero

n = número de cifras del número

LA DIVISIÓN

Es una operación que consiste en hallar un factor llamado cociente, el cual indica el número de veces que un factor, llamado divisor, está contenido en otro llamado dividendo.

$$\boxed{D = d \,.\, q \Leftrightarrow \frac{D}{d} = q}$$

Donde: D = dividendo

d = divisor

q = cociente

Además, cuando la división es inexacta tiene un residuo.

a) División inexacta por defecto:

$$D = d \cdot q + r$$

Donde:

$$R \neq 0 \ , \ \ r < d$$

b) División inexacta por exceso:

$$D = d(q + 1) - r'$$

Donde:

$$r' \neq 0, 0 < r' < d$$

1) LEY DE UNIFORMIDAD

Si se divide miembro a miembro dos igualdades, el resultado es otra igualdad; si las divisiones son exactas.

$$A = B \ \text{ y } \ C = D$$

Luego: $$\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$$

2) LEY DE MONOTONÍA

Si ambos miembros de una desigualdad son divididos por un mismo número que sea divisor de ambos, se obtiene otra desigualdad cuyo sentido es el mismo que la desigualdad dada.

A > B; "d" divisor de ambos $\Rightarrow \dfrac{A}{d} > \dfrac{B}{d}$

3) LEY DISTRIBUTIVA RESPECTO DE LA SUMA

El cociente de una suma indicada dividida por un divisor es igual a la suma de los sumandos divididos cada uno por el divisor común.

$$\frac{a + b + c + m}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d} + \frac{m}{d} = q$$

4) LEY DISTRIBUTIVA RESPECTO A LA RESTA

El cociente de una resta indicada dividida por un divisor común es igual a la resta de los cocientes resultantes.

$$\frac{a - b}{d} = \frac{a}{d} - \frac{b}{d} = q$$

ALTERACIONES DE LOS TÉRMINOS DE UNA DIVISIÓN

1) Alteración del dividendo.-

En una división exacta, si al dividendo se le multiplica o se le divide por un número cualquiera, sin alterar el divisor, entonces el cociente queda multiplicado o dividido, respectivamente, por el mismo número.

Casos:

a) $\dfrac{D}{d} = q \quad ; \quad \dfrac{D \cdot n}{d} = q \cdot n$

b) $\dfrac{D}{d} = q \quad ; \quad \dfrac{D \div n}{d} = q \div n$

2) Alteración del divisor.-

En una división exacta, si al divisor se le multiplica o se le divide por un número cualquiera, sin alterar el dividendo, entonces el cociente queda dividido o multiplicado respectivamente, por dicho número.

Casos:

a) $\dfrac{D}{d} = q \quad ; \quad \dfrac{D}{d \cdot n} = q \div n$

b) $\dfrac{D}{d} = q \quad ; \quad \dfrac{D}{q \div n} = q \cdot n$

3) Alteración del dividendo y divisor.-

En una división exacta, si al dividendo y al divisor se les multiplica o divide simultáneamente por un mismo nùmero, el cociente no varía.

Casos:

a) $\dfrac{D}{d} = q \quad ; \quad \dfrac{D \cdot n}{q \cdot n} = q$

b) $\dfrac{D}{d} = q \quad ; \quad \dfrac{D \div n}{q \div n} = q$

En una división inexacta, si al dividendo y al divisor se les multiplica o se les divide por el mismo número, el cociente no se altera, pero el residuo queda multiplicado o dividido respectivamente, por el mismo número.

a) $\frac{D}{d} = q + r$; $\frac{D \,.\, n}{d \,.\, n} = q + r \,.\, n$

b) $\frac{D}{d} = q + r$; $\frac{D \div n}{d \div n} = q + r \div n$

PROPIEDADES DEL RESTO O RESIDUO

1° El resto siempre es menor que el dividendo

$$r < d$$

2° El resto siempre debe ser menor que la mitad del dividendo:

$$r < \frac{D}{2}$$

3° El resto máximo siempre será igual al divisor menos uno:

$$r_{\text{máx}} = d - 1$$

4° La suma de los valores absolutos de los restos por defecto y por exceso siempre es igual al divisor.

$$| r | + | r' | = d$$

RELACIONES NOTABLES DE LAS CUATRO OPERACIONES

1) Dadas la suma "S" y la diferencia "D" de dos números "a" y "b", donde a > b:

$$\boxed{a = \frac{S + D}{2}} \qquad \boxed{b = \frac{S - D}{2}}$$

2) Dados la suma "S" y el cociente "q" de dos números "a" y "b", donde a > b:

$$\boxed{a = \frac{q \,.\, S}{q + 1}} \qquad \boxed{b = \frac{S}{q + 1}}$$

3) Dados la suma "S", el cociente "q" y el residuo "r" de dos números "a" y "b" (a > b).

$$\boxed{a = \frac{S \,.\, q + r}{q + 1}} \qquad \boxed{b = \frac{S - r}{q + 1}}$$

4) Dados la diferencia "D" y el cociente "q" de dos números "a" y "b", donde a > b.

$$\boxed{a = \frac{q \,.\, D}{q - 1}} \qquad \boxed{b = \frac{D}{q - 1}}$$

5) Dados la diferencia "D", el cociente "q" y el residuo "r" de dos números "a" y "b", donde a > b.

$$\boxed{a = \frac{D \,.\, q - r}{q - 1}} \qquad \boxed{b = \frac{D - r}{q - 1}}$$

6) Dados el producto "P" y el cociente "q" de dos números "a" y "b", donde a > b

$$\boxed{a = \sqrt{P \,.\, q}} \qquad \boxed{b = \sqrt{\frac{P}{q}}}$$

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS

DIVISIBILIDAD (en Z)

Un número "A" es divisible por otro número "B" solamente si el cociente de dividir "A" por "B" es un número entero "n".

$$\frac{A}{B} = n \Rightarrow A = n \,.\, B \Leftrightarrow n \in \mathbb{Z}$$

DIVISOR

Es un número que está contenido en otro un número exacto (entero) de veces.

Ejemplo:

{ -8; -4; -2; -1; 1; 2; 4; 8}

son todos los divisores de 8.

MULTIPLO

Múltiplo de un número es aquel número que contiene al primero un número (entero) exacto de veces.

Se denota:

$$A = m \,.\, B$$

o, también así:

$$A = \overset{\circ}{B}$$

Ejemplos:

{ -16; -8; 8; 16; 24 }

son algunos múltiplos de 8.

PROPIEDADES DE LA DIVISIBILIDAD

1º Si un número "n" divide a varios otros números, divide también a la suma o a la diferencia de dichos números.

$$\frac{A}{n} = q_1 \quad ; \quad \frac{B}{n} = q_2$$

$$\Rightarrow \frac{A \pm B}{n} = q$$

2º Si un número "n" no divide exactamente a otros dos (A y B), dividirá exactamente a la diferencia de ellos (A - B) si y solamente si los residuos (r_1 y r_2) que resultan de dividir cada número entre el número "n" son iguales.

$$A = n \, . \, q_1 \, r_1$$

$$B = n \, q_2 + r_2$$

Restando: $A - B = n(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2)$

$$\Leftrightarrow r_1 - r_2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2$$

3º Si un número "n" divide exactamente a otro número "A", también divide a todo múltiplo de éste.

Si: $\frac{A}{n} = q_1$

$$\Rightarrow \frac{m \, . \, A}{n} = q_2$$

4º Si un número "A" es divisible por otro "n" lo es también por los factores de éste.

Si: $\frac{A}{n} = q$

$$\Rightarrow \frac{A}{n_1} = q_1 \; ; \; \frac{A}{n_2} = q_2 \; ; \; \frac{A}{n_3} = q_3$$

donde: $n = n_1 \, . \, n_2 \, . \, n_3$

5º En una división inexacta, si un número "n" divide al dividendo "A" y al divisor "d", también divide al residuo "r".

Sea: $\frac{A}{d} = q + r$

Si: $\frac{A}{n} = q_1$ y $\frac{d}{n} = q_2$

Entonces : $\frac{r}{n} = q_3$

REGLAS PRÁCTICAS DE DIVISIBILIDAD

Se dice que un número es divisible:

Por 2, cuando termina en cero o en cifra par.

Por 4, cuando sus dos últimas cifras son ceros o múltiplos de 4.

Por 8, cuando sus tres últimas cifras son ceros o múltiplos de 8.

Por 5, cuando su última cifra es cero o cinco.

Por 25, cuando sus dos últimas cifras son ceros o un número múltiplo de 25.

Por 125, cuando sus tres últimas cifras son ceros o múltiplos de 125.

Por 2^n o 5^n, cuando las "n" últimas cifras son ceros o un número múltiplo de 2^n o 5^n.

Por 3, cuando la suma de sus cifras significativas es 3 o múltiplo de 3.

Por 9, cuando la suma de sus cifras significativas es 9 o múltiplo de 9.

Por 11, cuando la suma de las cifras que ocupan lugar impar menos la suma de las cifras que ocupan lugar par es: 0, 11 o múltiplo de 11.

Ejemplo: 538 527 es m11

Lugar par: $5 + 8 + 2 = 15$

Lugar impar: $3 + 5 + 7 = 15$

$$\Rightarrow 15 - 15 = 0$$

Por 6, cuando los es simultáneamente por 2 y por 3.

Por 22, cuando lo es simultáneamente por 2 y por 11.

Por 7, lo es cuando se verifica el siguiente procedimiento: "Se separa la última cifra significativa de la derecha, esta cifra se duplica y se resta al número que queda a la izquierda, con el resultado se hace lo mismo sucesivamente hasta llegar a un número pequeño tal, que a simple vista se puede ver si es o no múltiplo de 7; si lo es, el número es divisible entre 7”.

Ejemplos:

i) 63 743 no es m7.

$$6\,374 - 2 \,.\, 3 = 6\,368$$

$$636 - 2 \,.\, 8 = 620$$

$$6 - 2 \,.\, 2 = 2$$

$\therefore$ NO es m7, porque: $2 \neq$ m7

ii) 25 795

$$2\,579 - 2 \,.\, 5 = 2\,569$$

$$256 - 2 \,.\, 9 = 238$$

$$23 - 2 \,.\, 8 = 7$$

$\therefore$ SI es m7, porque: 7 = m7

Por 12, cuando lo es simultáneamente por 3 y por 4.

Por 14, cuando lo es simultáneamente por 2 y por 7.

Por 15,cuando lo es simultáneamente por 3 y por 5.

Por 16, cuando las 4 últimas cifra son ceros o el número formado por esta 4 últimas cifras es múltiplo de 16. Corresponde al caso de 2^n, cuando n = 4.

Por 17, cuando la diferencia entre sus decenas y el quíntuple de sus unidades es 17 o m17.

Ejemplo: 2 975

$$297 - 5 \,.\, 5 = 272$$

$$27 - 5 \,.\, 2 = 17$$

$\therefore$ 2 975 = m17

Por 19, cuando la suma de sus decenas con el doble de sus unidades es 19 o m19.

Ejemplos:

i) 4 835 no es m19.

$$483 + 2 \,.\, 5 = 493$$

$$49 + 2 \,.\, 3 = 55 \neq \text{M19}$$

ii) 12 635

$$1\,263 + 2 \,.\, 5 = 1\,273$$

$$127 + 2 \,.\, 3 = 133$$

$$13 + 2 \,.\, 3 = 19 = \text{m19}$$

NÚMEROS CONGRUENTES

Dos números son congruentes respecto de otro número “p”, llamado módulo, si al dividir por este módulo originan el mismo resto.

Se denota: $A = p \,.\, a + r$

$$B = p \,.\, b + r$$

En general: $A \equiv B$ (mod. P)

Ejemplo:

Verificar que los números 50 y 32 son congruentes con el módulo 6.

$$\frac{50}{6} = 8 + 2$$

$$\frac{32}{6} = 5 + 2$$

Notar que la condición necesaria y suficiente para que dos números sean congruentes respecto a un módulo, es que su diferencia sea múltipo del módulo.

$$A \equiv B \text{ (mod. p)} \Leftrightarrow A - B = \overset{\circ}{p}$$

Así, del ejemplo anterior:

$$50 - 32 = 18 \wedge 18 = \text{m6}$$

$\therefore$ $50 \equiv 32$ (mod. 2)

NÚMEROS PRIMOS (en $\mathbb{N}$)

CLASIFICACIÓN

1. Primos absolutos o simplemente primos.-

Son aquellos números primos que sólo son divisibles entre la unidad y entre sí mismos.

Ejemplos:

i) 1

ii) 3

iii) 17

iv) 59

2. Primos relativos.-

Son dos o más números que simultáneamente sólo son divisibles entre la unidad, aunque independientemente pueden ser divisibles por otro número diferente de 1.

Ejemplo:

5; 9; 14;

son primos relativos porque no son divisibles entre sí, aun cuando el 9 y el 14 son divisibles por otros números y el 5 es primo absoluto.

NÚMERO COMPUESTO

Es todo número no primo, resultado de multiplicar dos o más números primos absolutos o las potencias de estos.

Ejemplos:

i) $32 = 2^5$

ii) $180 = 2^2 . 3^2 . 5$

iii) $12 = 2^2 . 3$

iv) $33 = 3 . 11$

CRIBA DE ERATÓSTENES

Es una tabla denominada también “Tabla de los Números Primos Absolutos” y permite obtener los primeros números primos.

REGLAS PARA SU CONSTRUCCIÓN

1° Se escribe todos los números en $\mathbb{N}$ desde el 1 hasta el límite pedido.

2° Se tacha los múltiplos de 2, partiendo de 4.

3° El siguiente número no tachado es el 3; en consecuencia, se tacha los múltiplos de 3 , partiendo de 9.

4° Dado que el siguiente número no tachado es el 5, se tacha los múltiplos de 5, partiendo de 25.

5° Así sucesivamente, hasta concluir. Los números que quedan son los primeros números primos absolutos.

Ejemplo:

Hallar los números primos en el rango de los 100 primeros números naturales.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

En conclusión:

{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43,

47, 53, 57, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97}

es el conjunto de los números primos en el rango del 1 al 100.

FÓRMULAS GENERALES

Todo número compuesto, como se mencionó, puede ser expresado como el producto de 1 por dos o más factores primos y se pondrá calcular algunos elementos asociados cuyas fórmulas se indica a continuación.

Sea N número un número compuesto:

$$\boxed{N = a^{\alpha} . b^{\beta} . c^{\gamma} . \dots . w^{\omega}}$$

Donde:

$a, b, c, \ldots, w$ = factores primos de N

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \omega$ = exponentes de los factores primos de N

NÚMERO DE DIVISORES

1) $n = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) \ldots (\omega + 1)$

n: número de divisores de N

Ejemplo:

$N = 12 = 2^2 \cdot 3^1$

$n = (2 + 1)(1 + 1) = 6$

$\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

SUMA DE DIVISORES

2) $$S = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} \cdot \frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1} \cdot \frac{c^{\gamma+1} - 1}{c - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{w^{\omega+1} - 1}{w - 1}$$

S: suma de los divisores de N

SUMA DE INVERSAS DE DIVISORES

3) $$S_i = \frac{S}{N}$$

S_i: suma de la inversa de los divisores de N.

SUMA DE POTENCIAS DE LOS DIVISORES

4) $$S_q = \frac{a^{q(\alpha+1)} - 1}{a - 1} \cdot \frac{b^{q(\beta+1)} - 1}{b - 1} \ldots \frac{w^{q(\omega+1)} - 1}{w - 1}$$

S_q: suma de las potencias "q" de los divisores de N

PRODUCTO DE DIVISORES

5) $$P = \sqrt{N^n}$$

P: producto de los divisores de N

MÁXIMO COMÚN DIVISOR (M.C.D)

Máximo común divisor de dos números es el mayor divisor común de ellos.

Ejemplo:

Hallar el MCD de los números 36, 48 y 72

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$36 = 2^2 \cdot 3^3$

sus factores son:

1, 2, 4

3, 6, 12

9, 18, 36

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$48 = 2^4 \cdot 3$

sus factores son:

1, 2, 4, 8, 16,

3, 6, 12, 24, 48

$$\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$72 = 2^3 \cdot 3^2$

sus factores son:

1, 2, 4, 8,

3, 6, 12, 24,

9, 18, 36, 72

Los "divisores comunes" a los números 36, 48 y 72 son: 1, ,2 ,3 ,4 ,6 y 12, pero el mayor de ellos es **12**, éste es el MCD.

PROPIEDADES DEL M.C.D.

1) El MCD de los números primos es la unidad.

2) El MCD de dos o más números primos entre si es la unidad.

3) De dos números diferentes, estando uno contenido en el otro, MCD de ellos es el menor.

4) Si se divide dos números entre su MCD los cocientes que resultan son números primos relativos.

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (m.c.m.)

Mínimo común múltiplo de dos o más números es el menor multiplo común que contenga exactamente a los números dados.

REGLA PARA HALLAR EL m.c.m. DE DOS O MÁS NÚMEROS

Se descompone los números dados en sus factores primos; el m.c.m. de los números es igual al producto de los factores primos comunes y no comunes con sus mayores exponentes.

Ejemplo:

Hallar el mcm de 180; 528; 936.

180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

528	2
264	2
132	2
66	2
33	3
11	11
1	

$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \qquad 528 = 2^4 \cdot 3 \cdot 11$

936	2
468	2
234	2
117	3
39	3
13	13
1	

$936 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 13$

$\therefore$ m.c.m. (180; 528; 936) =

$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 = 102\,960$

PROPIEDADES

1° El mcm de dos o más números primos absolutos es igual al producto de ellos.

2° El mcm de dos números primos entre sí es el producto de ellos.

3° El cm de dos números, de los cuales uno contiene al otro es el mayor de ellos.

4° Si dos o más números son multiplicados o divididos por otro, el mcm queda multiplicado o dividido, respectivamente, por dicho número.

5° Si se divide el mcm de varios números entre cada uno de ellos, los cocientes resultantes son primos entre sí.

6° El producto de dos núneros enteros es igual al producto de MCD por el mcm.

$$\text{m.c.m.} = \frac{A \cdot B}{MCD}$$

o:

$$A \cdot B = (mcm)\,(MCD)$$

NÚMEROS RACIONALES (Fracciones)

A. FRACCIONES ORDINARIAS

Número fraccionario o quebrado es aquel número que está constituido por una o más partes de la unidad.

NOTACIÓN

Una fracción se denota por:

$$\frac{a}{b}$$

donde:

a es el numerador

b es el denominador

CLASIFICACIÓN

1) Fracciones propias.-
Son aquellas cuyo numerador es menor que el denominador.

Ejemplo: $\frac{5}{9}$

2) Fracciones impropias.-
Son aquellas cuyo numerador es mayor que el denominador. Las fracciones impropias son las que dan origen a los números mixtos.

Ejemplo: $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ (número mixto)

3) Fracciones homogéneas.-
Dos o más fracciones son homogéneas cuando tienen el mismo denominador.

Ejemplo: $\frac{8}{9}\ ,\ \frac{5}{9}\ ,\ \frac{22}{9}$

4) Fracciones heterogéneas.-
Dos o más fracciones son heterogéneas cuando tienen distintos denominadores.

Ejemplo: $\frac{4}{7}\ ,\ \frac{2}{5}\ ,\ \frac{6}{11}$

5) Fracciones equivalentes.-
Una fracción es equivalente a otra fracción si la segunda resulta de multiplicar o dividir al numerador y al denominador de la primera por un mismo número.

Ejemplo: $\dfrac{a}{b} <> \dfrac{a\,.\,K}{b\,.\,K} <> \dfrac{a/K}{b/K}$

6) Fracción irreductible.-
Cuando el numerador y denominador son primos entre sí (primos relativos).

Ejemplo: $\dfrac{3}{7}$

7) Fracciones iguales a la unidad.-
Cuando tienen numerador y denominador iguales.

Ejemplo: $\dfrac{3}{3} = \dfrac{5}{5} = \dfrac{6}{6} = \ldots = \dfrac{n}{n} = 1$

PROPIEDADES

1° Si el numerador y el denominador son multiplicados o divididos por un mismo número, el quebrado no varía.

Ejemplo: $\dfrac{5}{9} = \dfrac{5\,.\,4}{9\,.\,4} = \dfrac{5 \div 8}{9 \div 8}$

2° De varias fracciones homogéneas, es mayor la que tiene mayor numerador.

Ejemplo: $\dfrac{3}{17}\ ,\ \dfrac{12}{17}\ ,\ \dfrac{6}{17}$

$$\frac{12}{17} > \frac{6}{17} > \frac{3}{17}$$

3° De varias fracciones heterogéneas que tienen el mismo numerador, es mayor la que tiene menor denominador.

Ejemplo: $\dfrac{7}{15}\ ,\ \dfrac{7}{31}\ ,\ \dfrac{7}{6}$

$$\therefore \qquad \frac{7}{6} > \frac{7}{15} > \frac{7}{31}$$

4° El mcm de dos o más fracciones irreductibles es igual al mcm de los numeradores dividido entre el MCD de los denominadores.

Sean las fracciones $\dfrac{a}{b}\ ,\ \dfrac{n}{m}\ ,\ \dfrac{c}{d}$, irreductibles:

$$\text{m.c.m.} = \frac{\text{mcm }(a, n, c)}{\text{MCD }(b, m, d)}$$

5° El MCD de dos o más fracciones irreductibles es igual al MCD de los numeradores dividido entre el m.c.m. de los denominadores.

Sean las fracciones $\dfrac{a}{b}\ ,\ \dfrac{n}{m}\ ,\ \dfrac{c}{d}$, irreductibles:

$$\text{MCD} = \frac{\text{MCD }(a, n, c)}{\text{mcm }(b, m, d)}$$

FRACCIONES DECIMALES

Una fracción es decimal si su denominador es 10 o multiplo de 10.

Las fracciones decimales pueden ser:

CLASIFICACIÓN

a) Fracción decimal limitada.-
Son las que presentan un número limitado de cifras. A su vez, éstas puede ser:

- Fracción decimal exacta (fde).

Ejemplos:

0,362

0,125

- Fracción decimal periodica pura (fdpp).

Ejemplo: $0,\widehat{31}\ \widehat{31}\ \ldots = 0,\widehat{31}$

- Fracción decimal periódica mixta (fdpm).

Ejemplo: $0,25\ \widehat{37}\ \widehat{37}\ \ldots = 0,25\ \widehat{37}$

b) Fracción decimal ilimitada.-
Son las fracciones decimales que presentan un número indefinido de cifras y pueden ser:

- Números irracionales:

Ejemplo: $\sqrt{3} = 1,7320506 \ldots$

- Números trascendentes

Ejemplos: $\pi = 3,\ 14159265 \ldots$

$e = 2,71828183 \ldots$

TRANSFORMACIÓN DE FRACCIONES

1) Generatriz de una fracción decimal exacta.

Sea: $0,a_1\,a_2\,a_3\,\dots\,a_n$ una fde.

Su Generatriz es:

$$g = \frac{\overline{a_1\,a_2\,a_3\,\dots\,a_n}}{10^n}$$

Ejemplos:

i) $0,183 = \dfrac{183}{10^3} = \dfrac{183}{1\,000}$

ii) $3,25 = \dfrac{325}{10^2} = \dfrac{325}{100}$

2) Generatriz de una fracción decimal periódica pura.

Sea:

$\overline{0,b_1\,b_2\,b_3\,\dots\,b_n\,b_1\,b_2\,b_3\,\dots\,b_n}$ una fdpp.

Su generatiz es:

$$g = \frac{b_1\,b_2\,b_3\,\dots\,b_n}{10^n - 1}$$

Ejemplo: $0,\overparen{31}\,\overparen{31}\dots$

Su generatriz: $g = \dfrac{31}{10^2 - 1} = \dfrac{31}{99}$

3) Generatiz de una fracción decimal periódica mixta.

Sea:

$0,a_1\,a_2\,a_3\,\dots\,a_m b_1\,b_2\,\dots\,b_n\,b_1\,b_2\,\dots$ una fdpm

Su generatriz correspondiente es:

$$g = \frac{(a_1a_2\,\dots\,a_m b_1 b_2\,\dots\,b_n) - (a_1a_2\,\dots\,a_m)}{10^m(10^n - 1)}$$

Ejemplos:

i) $0,361515\,\dots = \dfrac{3\,615 - 36}{10^2(10^2 - 1)} = \dfrac{3\,579}{9\,900}$

ii) $0,26161\,\dots = \dfrac{261 - 2}{10^1(10^2 - 1)} = \dfrac{259}{990}$

POTENCIA Y RADICACIÓN DE CUADRADOS Y CUBOS

CUADRADO Y RAÍZ CUADRADA

CUADRADO

Se denomina cuadrado o segunda potencia de un número, al producto que resulta de multiplicar dicho número por sí mismo.

OPERACIONES MÁS IMPORTANTES

1) $a\,.\,a = a^2$

2) $a^2 + 3a^2 = 4a^2$

3) $(a^n)^2 = a^{2n}$

4) $a^2 : a = \dfrac{a^2}{a^1} = a^{2-1} = a^1 = a$

5) $(a\,.\,b^3\,.\,c^2)^2 = a^2\,.\,b^{3\,.\,2}\,.\,c^{2\,.\,2} = a^2\,.\,b^6\,.\,c^4$

6) $\left(\dfrac{a^n}{b^m}\right)^2 = \dfrac{a^{2n}}{b^{2m}}$

7) $(a\,.\,10^n)^2 = a^2\,.\,10^{2n}$

CUADRADO PERFECTO

Un número es un cuadrado perfecto cuando al descomponerlo en el producto de sus factores primos, éstos presentan exponentes múltiplos de 2.

$$n = a^{\overset{\circ}{2}}\,.\,b^{\overset{\circ}{2}}\,.\,c^{\overset{\circ}{2}}\,.\,d^{\overset{\circ}{2}}\ ;\ (\overset{\circ}{2} = \text{multiplo de } 2)$$

Ejemplo: $324 = 2^2\,.\,3^4$

RAÍZ CUADRADA

Raíz cuadrada de un número, es otro número que, elevado al cuadrado, reproduce el número original.

$$\sqrt{N} = q \quad \Rightarrow \quad q^2 = N$$

La raíz cuadrada puede ser exacta o inexacta

Exacta: $\sqrt{N} = q$

Inexacta: $\sqrt{N} = q + r$

RAÍZ CUADRADA CON APROXIMACIÓN EN MENOS DE UNA FRACCIÓN

$$\boxed{A = \frac{a}{b}\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 . N}}$$

N = número a extraer su raíz cuadrada

A = raíz cuadrada con aproximación de una fracción

$\frac{a}{b}$ = fracción de aproximación

Ejemplo:

Hallar $\sqrt{196}$ con una aproximación menor que $\frac{3}{7}$

$$A = \frac{3}{7}\sqrt{\left(\frac{7}{3}\right)^2 . 196} = \frac{3}{7}\sqrt{\frac{7^2 . (4 . 7^2)}{3^2}}$$

$$= \frac{3}{7}\sqrt{\frac{49^2 . 2^2}{3^2}} = \frac{3 . 49 . 2}{7 . 3} = 14$$

CUBO Y RAÍZ CÚBICA

CUBO

Se denomina cubo o tercera potencia de un número, al producto que resulta de multiplicar dicho número 3 veces como factor.

OPERACIONES MÁS IMPORTANTES

1) $a . a . a = a^3$

2) $(a^n)^3 = a^{3n}$

3) $a^3 : a = \frac{a^3}{a^1} = a^{3-1} = a^2$

4) $(a^n . b^m . c^p)^3 = a^{3n} . b^{3m} . c^{3p}$

5) $\left(\frac{a^n}{b^n}\right)^3 = \frac{a^{3n}}{b^{3n}}$

6) $(a . 10^n)^3 = a^3 . 10^{3n}$

7) $\left(\frac{a}{10^n}\right)^3 = \frac{a^3}{10^{3n}}$

RAÍZ CÚBICA

Es aquel número que, elevado al cubo, reproduce el número original.

$$\sqrt[3]{N} = q \quad \Rightarrow \quad q^3 = N$$

La raíz cúbica puede ser exacta e inexacta:

Exacta: $= \sqrt[3]{N} = q$

Inexacta: $= \sqrt[3]{N} = q + r$

RAÍZ CÚBICA CON APROXIMACIÓN MENOR QUE UNA FRACCIÓN

$$\boxed{A = \frac{a}{b}\sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^3 . N}}$$

N = número a extraer a su raíz cúbica

A = raíz cúbica con aproximación

$\frac{a}{b}$ = fracción de aproximación

Ejemplo:

Hallar $\sqrt[3]{27\,000}$ con aproximación de $\frac{1}{2}$

$$A = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2^3 . 3^3 . 10^3} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{216 . 10^3} = \frac{6 . 10}{2} = 30$$

SISTEMAS DE MEDIDAS

SISTEMAS TRADICIONALES

SISTEMA MÉTRICO

La definición moderna de 1 metro equivale a 1 650 736, 73 veces la longitud de onda de la luz anaranjada emitida por los átomos de un isótopo puro de criptón (criptón 86) bajo una descarga eléctrica.

MEDIDAS AGRARIAS

1 área = $100m^2$

Hectárea = $10\,000m^2$ = 100 áreas

Centiárea = $1m^2$

MEDIDAS DE VOLUMEN

1 metro cúbico = $1m^3$

1 decímetro cúbico = 0,001 m^3

1 centímetro cúbico = 0,000001 m^3

1 milímetro cúbico = 0,000000001 m^3

MEDIDAS DE CAPACIDAD

1 Mirialitro = ML = 10 000 L

1 kilolitro = kL = 1 000 L

1 Decalitro = DL = 10 L

1 Litro = Lt = 1L = 1 decímetro cúbico

1 decilitro = dL = 0,1 L

1 centilitro = cL = 0,01 L

1 militro = mL = 0,001 L

MEDIDAS DE PESO

1 tonelada métrica = 1 000 kilos

1 quintal métrico = 100 kilos

SISTEMA ESPAÑOL

LONGITUD

1 legua = 6 666 2/3 varas = 4 827 m

1 vara = 2,76 pies = 0,84 m

1 pie = 12 pulgadas = 30,48 cm

1 pulgada = 2,54 cm

SUPERFICIE

1 vara cuadrada = 0,7 m^2

AGRARIA

1 fanegada = 28 978 m^2 = 3Ha

1 fanegada: es el área de terreno equivalente a 144 varas de ancho y 288 varas de largo.

VOLUMEN

1 vara cúbica = 0,59 m^3

PESO

1 tonelada =	20 quintales	= 920 kg	
1 quintal =	4 arrobas	= 46 kg	
1 arroba =	25 libras	= 11,4 kg	
1 libra =	16 onzas	= 0,454 kg	
1 onza =	8 dracmas	= 28,38 g	
1 dracma =	2 adarmes	= 2,5 g	
1 adarme =	3 tomines	= 1,25 g	

SISTEMA INGLES

LONGITUD

1 yarda = 3 pies = 0,914 m

1 pie = 12 pulgadas = 30,48 cm

1 pulgada = 2,54 cm

LONGITUD: Itinerarias

1 milla marina = 1 852 m

1 milla terrestre = 1 609 m

SUPERFICIE

1 yarda cuadrada = 0,836 m^2

1 pie cuadrado = 0,093 m^2

1 pulgada cuadrada = 0,000645 m^2

AGRARIA

1 acre = 43 560 pies cuadrados = 4 047 m^2

VOLUMEN

1 yarda cúbica = 0,7646 m^3

1 pie cúbico = 0,02832 m^3

1 pulgada cúbica = 0,000016 m^3

CAPACIDAD

1 galón imperial = 4,546 L

(1 galón U.S.A. = 3,785 L)

PESO

Se utiliza tres sistemas:

Avoirdupois (más utilizado)

Troy (usado para metales nobles)

Apothecables (usado en farmacias)

SISTEMA AVOIRDUPOIS (avdp)

1 tonelada larga = 2 240,0 lb = 1 016,05 = kg

1 tonelada corta = 2 000,0 lb = 907,18 = kg

1 quintal = 100,0 lb = 45,36 = kg

1 libra = 16,0 Onz. = 453,59 = g

1 onza = 16,0 dracmas = 28,35 = g

1 dracma = 27,3 granos = 1,77 = g

DENSIDAD DE ALGUNOS CUERPOS g/cm^3

agua destilada = 1

agua de mar = 1,03

aire = 0,00129

hielo = 0,92

hierro = 7,8

leche = 1,03

petróleo = 0,8

RELACIONES ENTRE LONGITUD Y TIEMPO

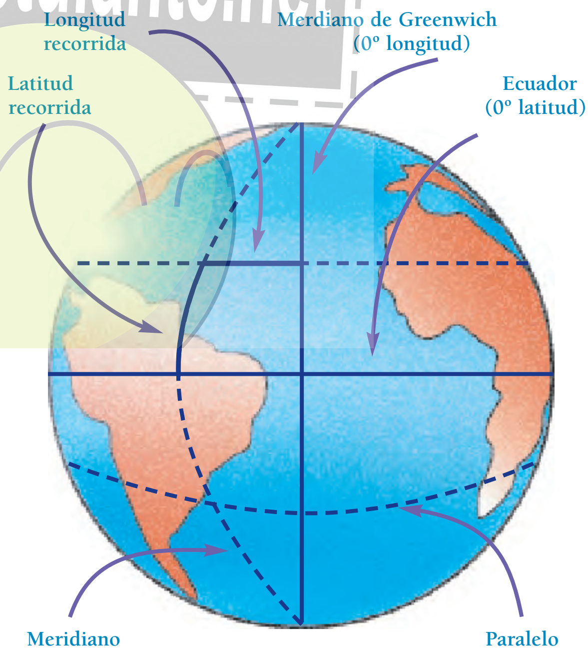
Tiempo		Arco
1 día	=	360º
1 hora	=	15º
1 minuto	=	15'
1 segundo	=	15"

DIMENSIONES GEOGRÁFICAS

Longitud: Distancia medida en arco sobre un círculo máximo de la tierra (el Ecuador) al meridiano de Greenwich.

Latitud: Distancia, medida en arco sobre un meridiano de cualquier punto al Ecuador.

Longitud y Latitud del punto P:



SISTEMA INTERNACIONAL (SI)

Está basada en el sistema métrico.

UNIDADES DE BASE

Son 7 unidades de base, establecidas arbitrariamente y consideradas independientemente porque no guardan relación entre sí:

MAGNITUDES FÍSICAS	UNIDAD DE MEDIDA	
	NOMBRE	SÍMBOLO
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Intensidad de corriente eléctrica	ampere	A
Temperatura termodinámica	kelvin	K
Intensidad luminosa	candela	cd
Cantidad de materia	mol	mol

UNIDADES SUPLEMENTARIAS

MAGNITUD FÍSICA	UNIDAD DE MEDIDA	
	NOMBRE	SÍMBOLO
Ángulo plano	radián	rad
Ángulo sólido	estereoradián	sr

RAZONES Y PROPORCIONES

RAZONES

Se llama "razón" a la comparación de dos cantidades. Esta comparación puede hacerse mediante una DIFERENCIA, en tal caso se llama "razón aritmética", o mediante una DIVISIÓN, en tal caso se llama "razón geométrica".

Razón Aritmética (R A)

$$a - b = d$$

Razón Geométrica (R G)

$$\frac{a}{b} = K$$

donde:

a: antecedente

b: consecuente

PROPIEDADES Y LEYES

Con la R A es una diferencia y la R G es una división, éstas cumple con las mismas propiedades de la resta y division, respectivamente.

PROPORCIONES

Se llama "proporción" a la igualdad de dos razones, siendo la característica principal que estas razones son iguales. Las proporciones pueden ser Aritméticas y Geométricas.

PROPORCIÓN ARITMÉTICA

Sean las R A: $a - b = k$

$c - d = k$

$\therefore$ P A: $a - b = c - d$

o, también: a . b : c . d

Se lee: "a es a b, como c es a d"

PROPORCIÓN GEOMÉTRICA

Sean las RG

$$\frac{a}{b} = k$$

$$\frac{c}{d} = k$$

$\therefore$ P G: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

o, también: a : b : : c : d

Se lee: "a es a b, como c es a d"

CLASES DE PROPORCIONES SEGÚN SUS TÉRMINOS

1) Proporción discreta.-

Una proporción Aritmética o Geométrica es discreta si sus términos son diferentes:

Sean:

$$a - b = c - d \ \vee \ \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\Rightarrow \ a \neq b \neq c \neq d$$

En este caso, cualquiera de los términos se llama "Tercera Proporcional".

2) Proporción continua.-

Una proporción Aritmética o Geométrica es continua sis sus términos medios, o sus términos extremos son iguales así:

Sean:

$$a - b = c - d \quad \vee \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\Rightarrow b = c \quad \vee \quad a = d$$

En este caso cualquiera de los términos diferentes se llama "Tercera Proporcional" y al término que se repite se le llama:

"media diferencial" si es P A

"media proporcional" si es P G

TÉRMINOS NOTABLES

MEDIA DIFERENCIAL (m d)

Sea la P A continua: $a - b = b - d$

$$b = \frac{a + d}{2}$$

MEDIA PROPORCIONAL (m p)

Sea la P G continua: $\frac{a}{b} = \frac{b}{d}$

$$b = \sqrt{a \cdot d}$$

MEDIA ARMÓNICA (m h)

Sean los números a y b; con inversas:

$$\frac{1}{a} \; , \; \frac{1}{b}$$

$$\therefore \qquad m_h = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

PROMEDIOS

Se denomina promedio, o cantidad media, a una cantidad tal que: de varias cantidades, el promedio es mayor que la inferior pero menor que la superior. Puede ser Aritmética, Geométria o Armónica.

MEDIDA ARITMÉTICA:

$$M_a = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n} \qquad a_1 < M_a < a_n$$

MEDIDA GEOMÉTRICA:

$$M_g = \sqrt{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n} \qquad a_1 < M_g < a_n$$

MEDIDA ARMÓNICA:

$$M_h = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \qquad a_1 < M_h < a_n$$

Además, se cumple que:

$$M_a > M_g \qquad M_g^2 = M_a \cdot M_h$$

y, el producto de dos cantidades es igual al producto de su media aritmética por su media armónica.

$$a \cdot b = Ma \cdot M_h$$

PROPIEDADES DE LAS PROPORCIONES GEOMÉTRICAS

Si: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, se cumple las siguientes propiedades:

$$\frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{c + d}{c - d}$$

$$\frac{a + c}{a - c} = \frac{b + d}{b - d}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{c}{d}\right)^n$$

$$\frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\sqrt[n]{\frac{c}{d}}$$

Si: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$, se verifica las siguientes propiedades.

$$\frac{a+c+e}{b+d+f}=k$$

$$\frac{a\;.\;c\;.\;e}{b\;.\;d\;.\;f}=k^3$$

MAGNITUDES PROPORCIONALES

Magnitudes proporcionales son aquellas que guardan alguna relación matemática entre sí. Pueden ser directa e inversamente proporcionales.

Magnitudes directamente proporcionales.-

Se dice que dos magnitudes "A" y "B" son directamente proporcionales, cuando los cocientes de cada par de sus valores son iguales:

$$A=\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$$

$$B=\{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n\}$$

$$\therefore\quad \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}=k$$

Magnitudes inversas proporcionales.-

Se dice que dos magnitudes "A" y "B" son inversamente proporcionales, cuando los productos de cada par de sus valores son iguales.

$$A=\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$$

$$B=\{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n\}$$

$$\therefore\quad a_1\,.\,b_1=a_2\,.\,b_2=a_3\,.\,b_3=\ldots=a_n\,.\,b_n=k$$

REGLA DE TRES

REGLA DE TRES SIMPLE

Se emplea para calcular un cuarto valor cuando otros tres son conocidos. La regla de tres simple puede ser: directa e inversa.

a) Directa: $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}\quad\Rightarrow\quad x=\frac{b\,.\,c}{a}$

b) Inversa: $a\,.\,b=c\,.\,x\quad\Rightarrow\quad x=\frac{a\,.\,b}{c}$

REGLA DEL TANTO POR CIENTO

La regla del tanto por ciento es un caso particular de la regla de tres simple directa.

Ejemplo:

Calcular el 8% de 98.

A mayor tasa, mayor interés. Son directamente proporcionales, luego:

$$\frac{8}{100}=\frac{x}{98}$$

$$x=\frac{8\,.\,98}{100}$$

REGLA DE TRES COMPUESTA

Una regla de tres compuesta está formada por una o más reglas de tres simple, que pueden ser todas directamente proporcionales o todas inversamente proporcionales o de proporción mixta.

Ejemplo:

5 hombres en 8 días fabrican 600 m de tela.

13 hombres en x días fabrican 1 300 m de tela.

$$\Rightarrow\quad x=\frac{5\,.\,13\,.\,1\,300}{8\,.\,600}=17{,}6 \text{ días}=18 \text{ días}$$

ARITMÉTICA MERCANTIL

INTERÉS SIMPLE

INTERÉS O RÉDITO

Se denomina Interés o Rédito a la ganancia que produce una cantidad llamada Capital, prestada por un tiempo determinado y según una tasa fijada.

Hay dos clases de intereses: Simple y Compuesto. El Interés Compuesto se estudia en Algebra.

FÓRMULAS BÁSICAS

$$I=\frac{C\,.\,i\,.\,t}{100}$$

$$C=\frac{100\,.\,1}{i\,.\,t}$$

$$\boxed{M = C + I}$$

I = Interés o rédito ganado.

C = Capital impuesto a un interés.

i = Tasa de interés (porcentaje que gana el capital).

t = Tiempo que demora el préstamo.

Si el tiempo es en años, se usa 100; si el tiempo está en meses, se usa 1 200; si el tiempo está en días, se usa 36 000.

M = Monto final que equivale a la suma del capital más el interes.

FÓRMULAS PARA CALCULAR EL MONTO EN FUNCIÓN DEL CAPITAL

$$M = \frac{C(100 + i \,.\, t)}{100}$$

t en años

$$M = \frac{C(1\,200 + i + t)}{1\,200}$$

t en meses

$$M = \frac{C(36\,000 + i \,.\, t)}{36\,000}$$

t en días

DESCUENTO

Es la disminuición que se hace a una cantidad indicada en un documento comercial para hacer efectivo su cobro antes de la fecha fijada para su vencimiento. El documento comercial, según su naturaleza se denomina:

Letra de cambio, Pagaré, Cheque bancario.

Hay dos clases de descuento:

Comercial y Racional.

DESCUENTO COMERCIAL

Es el interés simple, Dc, que produce el "Valor Nominal", Vn (que es aquel escrito en el documento) de una letra desde el día en que se hace el descuento hasta el día del vencimiento; a este descuento se le conoce también como descuento interno.

$$Dc = \frac{Vn \,.\, i \,.\, t}{100}$$

t en años

$$Dc = \frac{Vn \,.\, i \,.\, t}{1\,200}$$

t en meses

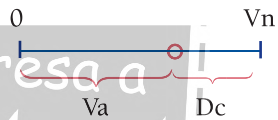
$$Dc = \frac{Vn \,.\, i \,.\, t}{36\,000}$$

t en días

Además se define el nuevo valor a cobrar como:

$$Va = Vn - Dc$$

Va = Valor actual



valor actual en función del valor nominal

$$Va = \frac{Vn(100 - i \,.\, t)}{100}$$

$$Va = \frac{Vn(1\,200 - i \,.\, t)}{1\,200}$$

$$Va = \frac{Vn(36\,000 - i.\, t)}{36\,000}$$

DESCUENTO RACIONAL

Es el interés simple producido por el Valor Actual" de una letra, desde el día en que se hace el descuento hasta el día de su vencimiento.

$$Dr = \frac{Va \,.\, i \,.\, t}{100}$$

$$Dr = \frac{Va \,.\, i \,.\, t}{1\,200}$$

$$Dr = \frac{Va \,.\, i \,.\, t}{36\,000}$$

De este modo:

$$\boxed{Vn = Va + Dr}$$

VALOR ACTUAL EN FUNCIÓN DEL VALOR NOMINAL

$$Va = \frac{100 \cdot Vn}{100 + i \cdot t} \qquad Va = \frac{1\,200 \cdot Vn}{1\,200 + i \cdot t}$$

$$Va = \frac{36\,000 \cdot Vn}{36\,000 + i \cdot t}$$

COMPARACIÓN DEL DESCUENTO COMERCIAL CON EL DESCUENTO RACIONAL

Sólo por fines comparativos, establezcamos

$$Dr = \frac{Vn \cdot i \cdot t}{100 + i \cdot t} \qquad Dr = \frac{Vn \cdot i \cdot t}{1\,200 + i \cdot t}$$

$$Dr = \frac{Vn \cdot i \cdot t}{36\,000 + i \cdot t}$$

Lo que cual, nos permite deducir que:

$$Dc > Dr$$

$$Dc - Dr = \frac{Dr \cdot i \cdot t}{100}$$

$$Vn = \frac{Dc \cdot Dr}{Dc - Dr}$$

VENCIMIENTO COMÚN

Es una operación comercial que consiste en realizar una pago único de dos o más letras de cambio que tienen diferentes vencimientos; la fecha en que se realiza el pago único se denomina vencimiento común.

$$t = \frac{V_1 + t_1 \cdot V_2 \cdot t_2 + \ldots + V_n \cdot t_n}{V_1 + V_2 + \ldots + V_n}$$

t = Número de días o plazo de vencimiento de la letra única.

$t_1, t_2, \ldots, t_n$ = Plazo de vencimiento de cada una de las otras letras.

$V_1, V_2, \ldots V_n$ = Valores nominales de las otras letras.

DESCUENTOS SUCESIVOS

Todo los descuentos sucesivos aplicables, pueden ser consolidados en un descuento único "D.U.":

$$D.U. = \left[D_1 + D_2 - \frac{D_1 \cdot D_2}{100} \right] \%$$

D_1 = primer descuento

D_2 = segundo descuento

Ejemplo:

Un comprador logra un primer descuento de 25% y un descuento adicional, sobre el nuevo monto, del 10%. Se pregunta ¿ Cuál es el descuento final (único) que obtiene?

Solución:

Aplicando la fórmula:

$$D.U. = \left[25 + 10 - \frac{25 \cdot 10}{100} \right]$$

D.U. = 35 - 2,5 = 32,5

Luego: D.U. = 32,5 %

Como podrá observarse el descuento único NO es el 35 % (25 + 10).

AUMENTOS SUCESIVOS

Porcentajes de aumento a las nuevas cantidades, resultan en un Aumento Único "A.U.":

$$A.U. = \left[A_1 + A_2 + \frac{A_1 \cdot A_2}{100} \right]$$

Ejemplo:

Un capital aumenta en dos porcentajes sucesivos de 18 % y 12 %. ¿Cuál es el porcentaje de aumento único?
Solución:

Dado que el 12% se aplica sobre el nuevo monto, la respuesta No Es 40% (18 + 12):

$$A.U. = \left[18 + 12 + \frac{18\ .\ 12}{100}\right]$$

$$A.U. = 30 + 2{,}16 = 32{,}16$$

Luego: A.U. = 32,16 %

REGLAS DE FALSA SUPOSICIÓN

Consiste en un supuesto que se hace del valor numérico de la respuesta a un problema. Puede ser SIMPLE o DOBLE.

1) Simple.-

Se asigna a la incógnita un valor numérico supuesto. Si este valor se opera y se cumple con el problema, es la respuesta; en caso contrario, se plantea la proporción:

$$\frac{\text{Resultado obtenido}}{\text{Número supuesto}} = \frac{\text{Resultado que debe obtenerse}}{\text{Incógnita}}$$

2) Doble.-

Consiste en suponer dos valores distintos para la incógnita, con estos valores se opera y la diferencia de cada uno de estos resultados con el verdadero, constituyen los errores.

$$x = \frac{V'\ .\ e - V''\ .\ e}{e'' - e'}$$

X = Incógnita

V' = Primer valor supuesto

V" = Segundo valor supuesto

e' = Error que se comente con V'

e" = Error que se comete con V"

REPARTIMIENTO PROPORCIONAL

TIPOLOGÍA

Consiste en repartir un número "N" en otros números tales como x, y, z, que sean a su vez proporcionales a los números a, b, c.

El reparto puede ser directo o inversamente proporcional.

1) Reparto directamente proporcional.-

Repartir el número "N" en partes directamente proporcionales a los números a, b, c.

Sean x, y, z los números buscados:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{N}{a + b + c}$$

De aqui:

$$x = \frac{N\ .\ a}{a + b + c} \qquad y = \frac{N\ .\ b}{a + b + c} \qquad z = \frac{N\ .\ c}{a + b + c}$$

Por principio de proporción geométrica:

$$x + y + z + = N$$

2) Reparto inversamente proporcional.-

Consiste en repartir el número "N" en 3 números que sean inversamente proporcionales a los números a, b, c.

Sean x, y, z los números buscados.

$$\frac{x}{\frac{1}{a}} = \frac{y}{\frac{1}{b}} = \frac{z}{\frac{1}{c}} = \frac{N}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

De aqui:

$$x = \frac{\frac{1}{a} \cdot N}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \qquad y = \frac{\frac{1}{b} \cdot N}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

$$z = \frac{\frac{1}{c} \cdot N}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

Por principio, se cumple que:

$$N = a + b + c$$

REPARTIMIENTO PROPORCIONAL COMPUESTO

Es repartir el número N en partes directamente proporcionalesa los números a, b. c e inversamente proporcionales a los números a', b', c'.

$$\frac{x}{\frac{a}{a'}} = \frac{y}{\frac{b}{b'}} = \frac{z}{\frac{c}{c'}} = \frac{N}{\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} + \frac{c}{c'}}$$

APLICACIONES

REGLA DE COMPAÑÍA O DE SOCIEDAD

Es una aplicación de los repartos proporcionales. El objetivo es repartir entre dos o más socios la ganancia o pérdida. Puede ser simple o compuesta.

REGLA DE COMPAÑÍA COMPUESTA

$$g_1 = \frac{G \cdot c_1 \cdot t_1}{c_1 \cdot t_1 + c_2 \cdot t_2 + \dots + c_n \cdot t_n}$$

$$g_2 = \frac{G \cdot c_2 \cdot t_2}{c_1 \cdot t_1 + c_2 \cdot t_2 + \dots + c_n \cdot t_n}$$

Donde:

$g_1, g_2, \dots$ = ganancias o pérdidas de cada socio

G = ganancia o pérdida total

$c_1, c_2, \dots$ = capitales aportados por cada socio

$t_1, t_2, \dots$ = tiempo en que se impone cada capital

n = número de socios

REGLA DE COMPAÑÍA SIMPLE

Puede presentarse los siguientes casos:

a) Capitales iguales y tirmpos iguales:

$$(c_1 = c_2 = \dots ; t_1 = t_2 = \dots)$$

$$g = \frac{G}{n}$$ (g = ganancia o pérdida)

Ganancia o pérdida igual para cada socio.

b) Capitales diferentes y tiempos iguales:

$$(t_1 = t_2 = \dots = t_n)$$

$$g_1 = \frac{G \cdot c_1}{c_1 + c_2 + \dots + c_n}$$

c) Capitales iguales y tiempos diferentes:

$$(c_1 = c_2 = \dots = c_n)$$

$$g_1 = \frac{G \cdot t_1}{t_1 + t_2 + \dots + t_n}$$

REGLA DE MEZCLA O ALIGACIÓN

Se presenta dos casos: Mezcla propiamente dicha y aleación.

A) MEZCLA

Es la unión de dos o más ingredientes, conservando cada cuál su naturaleza. Desde un punto de vista comercial, la mezcla se realiza con el objeto de establecer el precio promedio, de manera que no haya pérdida ni ganancia.

Puede ser Directa o Inversa.

REGLA DE MEZCLA DIRECTA

Sirve para calcular el precio promedio:

$$Pm = \frac{p_1 \cdot c_1 + p_2 \cdot c_2 + \dots + p_n \cdot c_n}{c_1 + c_2 + \dots + c_n}$$

Pm = Precio medio

$p_1, p_2, p_3, \dots p_n$ = Precios unitarios de cada ingrediente.

$c_1, c_2, c_3, \dots c_n$ = cantidades de cada ingrediente.

REGLA DE MEZCLA INVERSA

Sirve para calcular las proporciones en que intervienen los ingredientes, conocidos susprecios unitarios y su precio medio.

$$\frac{x}{y} = \frac{Pm - py}{px - Pm}$$

x, y = ingredientes de la mezcla (magnitudes físicas: peso, etc.)

Pm = precio medio de la mezcla

px, py = precios unitarios de los ingredientes

ALEACIÓN

Es el resultado que se obtiene al fundir varios metales, entre ellso siempre hay un metal más fino. La aleación es una mezcla.

LEY DE ALEACIÓN

Es la relación del peso del metal fino y el peso total de la aleación, se expresa en milésimos.

$$L = \frac{F}{P}$$

L = ley de aleación

F = peso del metal fino

P = peso de la aleación

ALEACIÓN DIRECTA

Se trata de calcular la ley de una aleación resultante al fundir lingotes de diferentes leyes.

$$L = \frac{F_1 + F_2 + \dots + F_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

L = ley de aleación

$F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ = peso del metal fino en cada lingote.

$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ = peso de cada lingote.

ALEACIÓN INVERSA

Se trata de calcular la proporción de los pesos de los lingotes que intervienen en la aleación, cuyas leyes se conoce:

$$\frac{x}{y} = \frac{L_s - L_m}{L_m - L_i}$$

x = peso del lingote de ley superior

y = peso del lingote de la ley inferior

L_s = ley del lingote de ley superior

L_i = ley del lingote de ley inferior

L_m = ley media

CAMBIOS EN LA LEY DE UNA ALEACIÓN

AUMENTO DE LA LEY DE UNA ALEACIÓN

$$p = \frac{P(L_A - L)}{L_A}$$

p = peso del metal fino que se tiene que agregar

P = peso inicial de la aleación

L_A = nueva ley del lingote

L = ley inicial del lingote

DISMINUCIÓN DE LA LEY DE UNA ALEACIÓN

$$p = \frac{P(L - L_D)}{L_D}$$

p = peso del metal pobre que se tiene que agregar

P = peso inicial de la aleación

L_D = nueva ley del lingote

L = ley inicial del lingote

LEY DE KILATES

Kilate es una forma de iniciar la pureza de una aleación denotando el número de partes de metal fino en 24 partes de aleación.

Por ejemplo, oro de 18 kilates quiere decir que si la joya pesa 24, 18 son de oro. También se puede expresar en porcentaje.

$$L = \frac{\text{Número de kilates}}{24}$$

Ejemplo:

¿Que porcentaje de metal fino contiene unas joyas de oro de 18 kilates?

$$L = \frac{18}{24} = 0{,}75$$

$\therefore$ P = 75% de oro puro.

ÁLGEBRA

DEFINICIÓN

Es la parte de la matemática elemental que estudia a la cantidad en su forma más general. Para su estudio emplea números y letras.

NOTACIÓN USADA EN EL ÁLGEBRA

Las cantidades conocidas son representadas por las pirmeras letras del alfabeto: a, b, c, d, … ; las cantidades desconocidas o incógnitas, por las últimas letras: x, y, z, …

Para no repetir las letras, cuando hay alguna relación entre ellas se escribe:

$$a', b', c' \ldots ; \text{ o también : } a_1, b_2, c_3 \ldots$$

Los signos empleados en el algebra, son de tres clases: de operación, de relación y de agrupación.

A) SIGNOS DE OPERACIÓN

Son seis: $+$; $-$; $\cdot$; $:$; a^n ; $\sqrt{\ }$

Ejemplos:

i) +, se lee: "más".

a + b, se lee: "a más b"

ii) - , se lee: "menos"

a - b, se lee: "a menos b"

iii) · , se lee: "por"

a . b, se lee: "a por b"

iv) : , se lee: "entre"

a : b, se lee: "a entre b"

v) Exponente:

a^n, se lee: "a, a la n". (signo de potencia)

Significa "n" veces "a" como factor, así:

$$\underbrace{a \,.\, a \,.\, a \ldots a}_{n}$$

vi) $\sqrt{\ }$, se lee: "raíz"

$\sqrt{a}$, se lee: "raíz cuadrada de a"

B) SIGNOS DE RELACIÓN

= , se lee: "igual"

a = b, se lee: "a igual b"

> , se lee: "mayor que"

a > b, se lee: "a mayor que b"

< , se lee: "menor que"

a < b, se lee: "a menor que b"

≥ , se lee: "igual o mayor que"

a ≥ b, se lee: "a igual o mayor que b"

≤ , se lee: "menor o igual que"

a ≤ b, se lee: "a igual o menor que b"

$\equiv$, se lee: “idénticamente igual a”

$a \equiv b$, se lee: “a identicamente igual a b”

$\neq$, se lee: “diferente de”

$a \neq b$, se lee: “a diferente de b”

$\nless$, se lee: “ se lee no es menor que”

$a \nless b$, se lee: “a no es menor que b”

$\ngtr$, se lee: “no es mayor que”

$a \ngtr b$, se lee: “a no es mayor que b”

$\simeq$, se lee: “aproximadamente igual a”

$a \simeq b$, se lee: “a aproximadamente a b”

$<>$, se lee: “equivalente a”

$a <> b$, se lee: “a equivalente a b”

$\Rightarrow$, se lee: “a entonces b”

$a \Rightarrow b$, se lee: “a entonces a b” o “a implica a b”

$\wedge$, se lee: “y”

$a \wedge b$, se lee: “a y b”

$\vee$, se lee: “o”

$a \vee b$, se lee: “a o b”

$\cong$, se lee: “es congruente con”

$b \cong b$, se lee: “b es congruente con b”

C) SIGNOS DE AGRUPACIÓN

( ) : paréntesis

[ ] : corchetes

{ } : llaves

— : vínculo o barra

VALOR ABSOLUTO Y RELATIVO

A) Valor absoluto o número absoluto, es el valor que denota la fugura que representa, independiente del signo.

Ejemplos:

$|-5| = 5$; $|3| = 3$

B) Valor relativo o número relativo, es el valor que depende del signo que la acompaña.

Ejemplos:

-7 ; +4

OPERACIONES FUNDAMENTALES CON LOS NÚMEROS RELATIVOS

A) SUMA

- Suma de dos números positivos:

$(+5) + (+7) = +5 + 7 = +12$

- Suma de dos números negativos:

$(-3) + (-5) = -3 - 5 = -8$

- Suma de un número positivo y un número negativo:

$(+7) + (-3) = +7 - 3 = +4$

$(-12) + (+2) = -12 + 2 = -10$

B) SUSTRACCIÓN

- $(+8) - (+4) = +8 - 4 = +4$
- $(-8) - (-13) = -8 + 13 = +5$
- $(-12) - (-8) = -12 + 8 = -4$

C) MULTIPLICACIÓN

- $(+3)\ (+5) = +15$
- $(-2)\ (-3) = +6$
- $(+5)\ (-8) = -40$
- $(-12)\ (+3) = -36$