D) DIVISIÓN

- $(+18) \div (+2) = +9$
- $(+12) \div (-4) = -3$
- $(-15) \div (-3) = +5$
- $(-14) \div (+7) = -2$

E) POTENCIA

$$(+2)^2 = +4$$

$$(-5)^4 = 625$$

$$(-3)^3 = -27$$

F) RAÍCES

$\sqrt[\text{par}]{(+)} = +$ y/o $-$ (dos raíces)

$\sqrt[\text{par}]{(-)} =$ número imaginario

$\sqrt[\text{impar}]{(+)} = +$

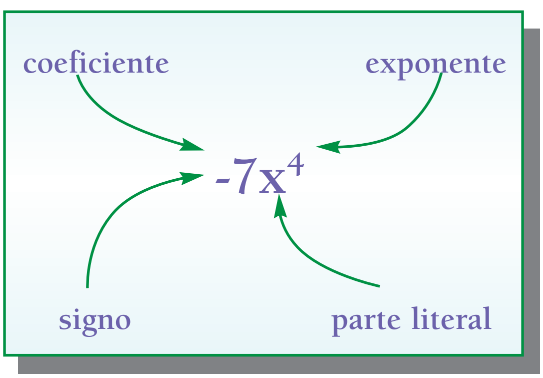
$\sqrt[\text{impar}]{(-)} = -$

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

PRINCIPALES CONCEPTOS

TERMINO ALGEBRAICO

Es la mínima expresion algebraica cuyas partes no están separadas ni por el signo más ni por el signo menos. Las partes de un término algebraico son:



EXPRESIÓN ALGEBRAICA

Es el conjunto de números y letras unidas entre sí por los signos de operación: más, menos, por, entre, exponente, radiación.

Ejemplo:

i) $4x^2 + 5y^2 + 7z^2$

ii) $4x$

iii) $\dfrac{3x^5 + \sqrt{1 + x}}{2xy + y^5}$

Las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas no son expresiones algebraicas, son funciones trascendentes.

Ejemplos:

i) 5^x

ii) $\log_b x$

iii) sen x

CLASIFICACIÓN DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS

A) RACIONALES.-

Sus exponentes son enteros, la cantidad sub-radical no tiene letras.

Ejemplos:

i) $4ax^2 + 5y^3 + 7z^4 + 3x^{-5}z$

ii) $\dfrac{3}{4}x^3 + \dfrac{5z}{6}$

iii) $2y + \sqrt{3}\,x + \sqrt[5]{7}\,x^5y$

B) IRRACIONALES.-

Tiene exponentes fraccionarios, la cantidad subradical incluye letras.

Ejemplos:

i) $5x^{1/2} + 7y^{1/3} + 8z^{1/5} + 9y^{-1/2}$

ii) $4x^{12} + 5y + 2\sqrt{3xy}$

iii) $\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3y}{\sqrt[3]{z}} + \frac{7}{\sqrt[5]{y}}$

A su vez, las expresiones algebraicas irracionales pueden ser enteras o fraccionarias.

- **Racional entera.-** Denominadores sin letras, exponentes positivos.

  Ejemplos:

  i) $2x^2 + 3z^2y^3 + 6w^4$

  ii) $3x^4 + \frac{9y^2}{8} + \frac{1}{3}z^2$

- **Racional fraccionaria.-** Denominadores con letras, exponentes negativos.

  Ejemplos:

  i) $4x^{-3} + 7y^{-9} + \frac{7x}{4yz^2} - \frac{2}{3y}$

Obsérvese que:

$$x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$

$$y^{-9} = \frac{1}{y^9}$$

ii) $\frac{4x^2 + 2y + z}{5x^4 + 2x + z}$

TEORÍA DE EXPONENTES

La teoría de exponentes estudia todas las clases de exponentes que existen y las relaciones entre ellos.

OPERACIÓN DE EXPONENTES

1) $a^m . a^n = a^{m+n}$

2) $a^m . b^m = (a . b)^m$

3) $(a^m)^n = a^{mn}$

4) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

5) $a^0 = 1, a \neq 0$

6) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

7) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

8) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

9) $\sqrt[m]{a} \;.\; \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a . b}$

10) $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$

11) $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$

12) $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}$

13) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

LEY DE LOS SIGNOS

1) MULTIPLICACIÓN

$(+) \;.\; (+) = (+)$

$(+) \;.\; (-) = (-)$

$(-) \;.\; (+) = (-)$

$(-) \;.\; (-) = (+)$

2) DIVISIÓN

$\frac{(+)}{(+)} = (+) \qquad \frac{(+)}{(-)} = (-)$

$\frac{(-)}{(+)} = (-) \qquad \frac{(-)}{(-)} = (+)$

3) POTENCIA

$(+)^{2n} = (+)$

$(+)^{2n+1} = (+)$

$(-)^{2n} = (+)$

$(-)^{2n+1} = (-)$

4) RADIACIÓN

$$\sqrt[2n+1]{(+)} = (+)$$

$$\sqrt[2n+1]{(-)} = (-)$$

$$\sqrt[2n]{(+)} = (\pm)$$

$$\sqrt[2n]{(-)} = \text{número imaginario}$$

Nota.- $2n$ = número par

$2n + 1$ = número impar

ECUACIONES EXPONENCIALES

Son igualdades relativas cuyas incógnitas aparecen como exponentes. Se llama igualdad relativa aquella que se verifica soló para algunos valores que se le asigna a la incógnita.

Así:, por ejemplo:

$$7^{x+1} = 343$$

$$7^{x+1} = 7^3$$

igualando exponentes:

$$x + 1 = 3$$

$$\therefore \quad x = 2$$

VALOR NUMÉRICO

Es aquel valor que adquiere una expresión algebraica cuando se le asigna un valor numérico a sus letras.

Ejemplo:

Hallar el valor numérico de:

$$E = x^5 + 3x^2 - 8x + 1; \text{ para } x = 1$$

sustituyendo $x = 1$:

$$E = 1^5 + 3 \,.\, 1^2 - 8 \,.\, 1 + 1 = -3$$

GRADO DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS

GRADO

Es una característica de la expresión algebraica, dada por el exponente de sus letras, el cual debe ser un número entero y positivo. El exponente permite además determinar el número de soluciones que tiene una ecuación. El grado puede ser relativo y absoluto.

GRADOS DE UN MONOMIO

MONOMIO

Es la mínima expresión algebraica formado por un solo **término algebraico**.

GRADO ABSOLUTO (G.A)

Es la suma de los exponentes de todas las letras del monomio.

Ejemplo:

$$M = x^2y^3z^{-1}$$

$$\therefore \quad G.A.M. = 2 + 3 - 1 = 4$$

GRADO RELATIVO (G.R.)

Está dado por el exponente de una letra del monomio.

Ejemplo:

$$M = 4x^3y^5z^4w^2$$

$$\therefore \quad G.R.M. \; y = 5$$

$$G.R.M. \; x = 3$$

que se lee: "el grado relativo del monomio respecto a la letra y es 5 y respecto a la letra x, es 3".

GRADOS DE UN POLINOMIO

POLINOMIO

Es una expresión algebraica que tiene 2 o más términos algebraicos.

Por convención, se denomina:

Binomio: cuando tiene 2 términos

Trinomio: cuando tiene 3 términos, etc.

GRADOS ABSOLUTO DE UN POLINOMIO(G.A.P.)

Está dado por el grado del término que tiene mayor grado absoluto.

Ejemplo: Sea el polinomio:

$$P = 4x^2y^3w^4 + 3xy^5w - 18x^6y^8w^{-7}$$

G.A. de $4x^2y^3w^4$ $= 2 + 3 + 4 = 9$

G.A. de $3xy^5w$ $= 1 + 5 + 1 = 7$

G.A. de $-18x^6y^8w^{-7}$ $= 6 + 8 - 7 = 7$

Luego: G.A.P. = 9

GRADO REALTIVO DE UN POLINOMIO(G.R.P.)

Está dado por el mayor exponente de la letra referida en el problema. Así en el polinomio del ejemplo anterior:

G.R.P. respecto a $x = 6$

G.R.P. respecto a $y = 8$

G.R.P. respecto a $w = 4$

POLINOMIOS

NOTACIÓN POLINÓMICA

Es la representación de un polinomio, mediante sus variables y sus constantes.

VARIABLE.- Es toda magnitud que cambia de valor.

CONSTANTE.- Es toda magnitud que tiene valor fijo.

NOTACIÓN POLINÓMICA.-

La notación polinómica es la siguiente:

1) $P(x)$ se lee: "polinomio en x"

2) $P(x, y)$ se lee: "polinomio en x, y"

3) $P(x, y, z)$ se lee: "polinomio en x, y, z"

Ejemplos:

i) $P(x,y) = 4x^2 + 5y^3 + 2x^2y + 7$

ii) $P(x) = 5x^8 + 3x^5 - 6x^3 - 8$

iii) $P(x, y, z) = 8x^2y - 9xz + 2yz + 9z + 10y - 9$

POLINOMIOS ESPECIALES

Se trata de polinomios importantes con características útiles:

A) POLINOMIOS ORDENADOS

Son aquellos que son ordenados de manera creciente o decreciente con respecto al grado de una letra.

Ejemplo:

$$P(x,y) = 4x^3y^{12} + 5x^7y^8 + 4x^{12}y^2$$

P(x, y) está ordenado de forma creciente con respecto a x, ordenado de forma decreciente con respecto a y.

B) POLINOMIO COMPLETO

Con respecto a una letra, es aquel que se caracteriza porque los exponentes de la letra considerada existen desde el mayor hasta el cero inclusive.

A este último término se le denomina "término independiente".

Ejemplos:

i) $P(x, y) = 5x^5 + 6x^4y + 7x^3y^2 + 3x^2 - 7x + 6y^3$

P(x,y) es completo con respecto a "x". El "término independiente" es $6y^3$.

ii) $P(x) = 4x^3 - 8x^2 + 12x - 9$

es completado con respecto a x. El término independiente es -9.

PROPIEDADES DE UN POLINOMIO COMPLETO

- Si el polinomio es de grado "n" el número de términos es igual a "n + 1".
- El grado del polinomio completo es igual al número de términos menos 1.

$$G P = \# T P - 1$$

- La diferencia de grados relativos de dos términos consecutivos es igual a la unidad.

$$G R_{(t_{x+1})} - GR_{(t_x)} = 1$$

- El "término independiente" contiene a la variable con exponente cero.

Ejemplo:

$$-9x^0 = -9$$

C) POLINOMIO HOMOGENEO

Todos sus términos tienen igual grado absoluto.

$P(x, y) = 4x7y12 + 8x3y16 + 6x2y17$

G.A.P. = 19

D) POLINOMIOS IDENTICOS

Son aquellos caracterizados porque los términos semejantes tienen coeficientes iguales.

Ejemplo: $4x^5 + 7y \equiv 4x^5 + 7y$

TÉRMINO SEMEJANTE

Es aquel que tiene igual parte literal afectada de los mismos exponentes, sin interesar los coeficientes.

Ejemplo:

Son términos semejantes:

$$4x^5y^2 \quad ; \quad -12x^5y^2 \quad ; \quad \frac{1}{4}x^5y^2$$

E) POLINOMIO IDENTICAMENTE NULO

Son aquellos cuyos coeficientes son iguales a cero.

Ejemplo:

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

donde: $a = b = c = d = 0$

F) POLINOMIO ENTERO EN "x"

Sus exponentes son enteros y su única variable es "x".

De primer grado:

$$P(x) = ax + b$$

De segundo grado:

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

De tercer grado:

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS

A) SUMA Y RESTA DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Para sumar o restar expresiones algebraicas, se suma, o se resta los coeficientes de los términos semejantes.

Ejemplo:

$$-8bx^2y^5 + 12bx^2y^5 + bx^2y^5 = 5bx^2y^5$$

SUPRESIÓN DE SIGNOS DE COLECCIÓN

1) Cuando el signo de colección está precedido del signo "más", se elimina este signo sin producir ningún cambio.

$$a + (b - c) = a + b - c$$

2) Cuando está precedido del signo "menos", se elimina el signo de colección cambiando todos los signos de suma o resta que se encuentra dentro de él.

$$a - (b - c) = a - b + c$$

INTRODUCCIÓN DE SIGNOS DE COLECCIÓN

1) Cuando tiene que ir precedido del signo "más", se escribe el signo de colección sin realizar ningún cambio.

$$a + b - c = a + (b - c)$$

2) Cuando tiene que ir precedido del signo "menos", se escribe el signo de colección, cambiando los signos de suma y de resta de todos los términos que se introduce.

$$a - b + c = a - (b - c)$$

MULTIPLICACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Es la operación que consiste en obtener una expresión llamada producto, conociendo otras dos llamadas multiplicando y multiplicador.

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN

- El grado del producto es igual a la suma de los grados de los factores.
- El término independiente del producto es igual al producto de los términos independientes de los factores.

Ejemplo:

Sea el producto:

$$(4x^4 + 5x + 6) \cdot (7x^5 + 6x^2 + 2) \cdot (3x^2 + 6x - 3) \cdot (2x - 5)$$

Grado (absoluto) del producto:

$$4 + 5 + 2 + 1 = 12$$

Término independiente:

$$(6)(2)(-3)(-5) = 180$$

CASOS EN LA MULTIPLICACIÓN

1) PRODUCTO DE DOS MONOMIOS

Se multiplica los signos, luego los coeficientes y, por último, las partes literales, de acuerdo a la teoria de exponentes.

2) PRODUCTO DE DOS POLINOMIOS

Se puede utilizar cualesquiera de los dos métodos siguientes:

- **Método normal.-** Se ordena los dos polinomios en forma descendente y se escribe uno debajo del otro. A continuación, se multiplica cada uno de los términos del multiplicador por cada uno de los términos del multilplicando, sus signos, sus coeficientes y sus letras; se obtiene los productos parciales, los cuales se escribe en forma ordenada uno debajo del otro del mismo grado y se suma ordenadamente, obteniendose finalmente el producto total.

  Ejemplo:

$$(x^3 + 3x^2 - 5x + 1)\ (x + 3)$$

  Solución:

$$\begin{array}{r}
x^3 + 3x^2 - 5x + 1 \\
x + 3 \\
\hline
x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x \qquad \\
3x^3 + 9x^2 - 15x + 3 \\
\hline
x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 14x + 3
\end{array}$$

- **Método de coeficientes separados.-** Se ordena descendentemente los coeficientes del multiplicando y multiplicador, escribiendolos en línea horizontal, uno debajo del otro. Se efectúa las operaciones como en el caso anterior, corriendo un lugar a la derecha despúes de cada producto parcial; para obtener el grado del producto se aplica la propiedad respectiva.

  Este método es recomendable para polinomios de una sola variable. En caso de faltar una potencia de la variable, se completa con el coeficiente "cero", tanto en el multiplicando como en el multiplicador.

  Ejemplo:

$$(4x^3 + 7x^2 - 6)\ (2x^2 - 3x - 4)$$

completando el multiplicando, se escribe:

$$(4x^3 + 7x^2 + 0x - 6)\ (2x^2 - 3x - 4)$$

Solución:

Se toma sólo los coeficientes:

$$\begin{array}{rrrrrr}
4 & +7 & +0 & -6 & & \\
2 & -3 & -4 & & & \\
\hline
8 & +14 & +0 & -12 & & \\
 & -12 & -21 & +0 & +18 & \\
 & & -16 & -28 & +0 & +24 \\
\hline
8 & +2 & -37 & -40 & +18 & +24
\end{array}$$

Sumando: $8 + 2 - 37 - 40 + 18 + 24$

Grado del producto: $3 + 2 = 5$

El producto final es, por consiguiente:

$$8x^5 + 2x^4 - 37x^3 - 40x^2 + 18x + 24$$

PRODUCTOS NOTABLES

Son denominados también "identidades algebraicas". Su desarrollo se conoce fácilmente por una simple observación, ya que obedecen a una ley. Lo más importantes son:

1) Cuadrado de una suma o una diferencia:

$$\boxed{(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2 \,.\, a \,.\, b + b^2}$$

2) Producto de una suma por su diferencia:

$$\boxed{(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2}$$

3) Cuadrado de un trinomio:

$$\boxed{\begin{array}{l}(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \,.\, a \,.\, b \\ \qquad\qquad + 2 \,.\, a \,.\, c + 2 \,.\, b \,.\, c\end{array}}$$

4) Cubo de una suma o de una diferencia:

$$\boxed{(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3 \,.\, a^2 \,.\, b + 3 \,.\, a \,.\, b^2 \pm b^3}$$

5) Producto de dos binomios que tienen un término común:

$$\boxed{(x + a)\ (x + b) = x^2 + (a + b)\ x + a \,.\, b}$$

6) Producto de un binomio por un trinomio que da una suma o diferencia de cubos:

$$(a \pm b)\ (a^2 \mp\ a\ .\ b + b^2) = a^3 \pm b^3$$

7) Identidades de LEGENDRE:

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2\ (a^2 + b^2)$$

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4\ .\ a\ .\ b$$

8) Identidades de LAGRANGE:

$$(ax + by)^2 + (bx - ay)^2 = (x^2 + y^2)\ (a^2 + b^2)$$

$$\begin{aligned}(ax + by + cz)^2 &+ (bx - ay)^2 \\ &+ (cx - az)^2 + (cy - bz)^2 \\ &= (a^2 + b^2 + c^2)\ (x^2 + y^2 + z^2)\end{aligned}$$

DIVISIÓN ALGEBRAICA

Consiste en averiguar cuántas veses una cantidad, que se llama divisor (d), está contenida en otra, que se llama dividendo (D). El dividendo y el divisor son los términos de la división y el resultado es el cociente (q). Si la división no es exacta existe un resto (r).

Expresión general:

$$D = q\ .\ d + r$$

Cuando la división es exacta: r = 0

entonces : D = q . d

PROPIEDADES DE LA DIVISIÓN

1º En toda división, el grado del cociente es igual al grado del dividendo menos el grado del divisor.

$$^{\circ}|\,q\,| = {^{\circ}|\,D\,|} - {^{\circ}|\,d\,|}$$

2º En toda división el grado del dividendo es mayor o igual que el grado del divisor.

$$^{\circ}|\,D\,| \geq {^{\circ}|\,r\,|}$$

3º En toda división el grado del divisor es mayor que el grado del resto (excepto polinomios homogéneos).

$$^{\circ}|\,d\,| \geq {^{\circ}|\,r\,|}$$

4º En toda división el grado máximo del resto es igual al grado del divisor menos uno.

$$^{\circ}|r_{(\text{máx})}| = {^{\circ}|\,d\,|} - 1$$

En el caso de división de polinomios homogéneos, no se cumple esta propiedad.

5º En el caso de polinomios homogéneos, el grado del resto es mayor que el grado del divisor.

$$^{\circ}|\,r\,| > {^{\circ}|\,d\,|}$$

CASOS EN LA DIVISIÓN

DIVISIÓN DE DOS MONOMIOS

Se procede en el siguiente orden:

Se divide los signos mediante la regla de signos.

Se divide los coeficientes.

Se divide los laterales aplicando "teoría de exponentes".

Ejemplo:

$$\frac{-16x^4y^8z^5}{4x^2y^5z^4} = -4x^2y^3z$$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Existe los siguientes métodos:

a) MÉTODO NORMAL

1. Se ordenan los polinomios, generalmente en forma descendente.

2. Se escribe éstos en línea horizontal, uno a continuación del otro y utlizando el signo de la división aritmética.

3. Se divide el primer termino del dividendo, entre el primer término del divisor, lo cual da el primer término del cociente.

4. Este primer término se multiplica por cada uno de los términos del divisor y se resta de los correspondiente términos del dividendo.(se cambian de signo los productos).

5. Se incorpora al residuo, el siguiente término del divisor. Se divide el primer término del resto obtenido, entre el primer término del divisor y se obtiene el segundo término del cociente.

6. Se procede como el paso 4, y así sucesivamente, hasta terminar la división.

Ejemplo:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
6x^3 & +\ 5x^2y & -\ 26xy^2 & +\ 33y^3 & 2x^2 - 3xy + y^2 \\ \cline{5-5}
-6x^3 & +\ 9x^2y & -\ 3xy^2 & & 3x + 7y \\ \cline{1-3}
 & 14x^2y & -\ 29xy^2 & +\ 33y^3 & \\
 & -14x^2y & +\ 21xy^2 & -\ 7y^3 & \\ \cline{2-4}
 & & -8xy^2 & +\ 26y^3 &
\end{array}
$$

El cociente es: $3x + 7y$

El resto es: $8xy^2 + 26y^3$

b) MÉTODO DE COEFICIENTES SEPARADOS

Además de las consideraciones del método normal, debe tenerse en cuenta que:

1. Se trabaja solamente con los coeficientes y sus signos.

2. En caso de faltar un término, se coloca en su lugar cero, tanto en el dividendo como en el divisor.

3. Se procede a dividir estos coeficientes siguiendo los pasos del método normal, de esta manera se obtiene los coeficientes del cociente con sus signos.

4. Para determinar el grado del cociente y el resto se aplica las siguientes propiedades:

$$°|\,q\,| = °|\,D\,| - °|\,d\,|$$

$$°|\,r\,| = °|\,d\,| - 1$$

5. Este método es recomendable para polinomios de una sola variable.

Ejemplo:

$$6x^5 - 20x^4 - 13x^3 + 25x^2 - 12x + 7$$

$$: 3x^2 - x + 1$$

Procedimiento:

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
6 & -\ 20 & -\ 13 & +\ 25 & -\ 12 & +\ 7 & 3 - 1 + 1 \\ \cline{7-7}
-6 & +\ 2 & -\ 2 & & & & 2 - 6 - 7 + 8 \\ \cline{1-3}
 & -\ 18 & -\ 15 & +\ 25 & & & \\
 & +\ 18 & -\ 6 & +\ 6 & & & \\ \cline{2-4}
 & & -\ 21 & +\ 31 & -\ 12 & & \\
 & & +\ 21 & -\ 7 & +\ 7 & & \\ \cline{3-5}
 & & & +\ 24 & -\ 5 & +\ 7 & \\
 & & & -\ 24 & +\ 8 & -\ 8 & \\ \cline{4-6}
 & & & & +\ 3 & -\ 1 &
\end{array}
$$

Grado del cociente:

$$°|\,q\,| = °|\,D\,| - °|\,d\,| = 5 - 2 = 3$$

$$\therefore \quad q = 2x^3 - 6x^2 - 7x + 8$$

Grado del resto:

$$°|\,r\,| = °|\,d\,| - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$\therefore \quad r = 3x - 1$$

c) MÉTODO DE HORNER

Es un caso particular del método de coeficientes separados y se emplea para la división de polinomios de cualquier grado. Se procede así:

1. Se escribe los coeficientes del dividendo en una fila de izquierda a derecha con su propio signo.

2. Se escribe los coeficientes del divisor en una columna de arriba hacia abajo, a la izquierda del primer término del dividendo; el primero de ellos con su propio signo y los restantes con signos cambiados.

3. El primer término del dividendo se divide entre el primer término del divisor, obteniendose el primer término del cociente, el cual se anota en la última fila del cuadro.

4. Se multiplica este término del cociente solamente por los términos del divisor a los cuales se les cambio su signo, colocándose los resultados a partir de la segunda columna a la derecha.

5. Se reduce la siguiente columna (efectuando la operación indicada) y se coloca este resultado en la parte superior para dividirlo entre el primer coeficiente del divisor y obtener el segundo termino del cociente.(en el ejemplo: +14 - 2 = +12).

6. Se multiplica este cociente por los términos del divisor a los cuales se cambio de signo, colocándose los resultados a partir de la tercera columna a la derecha.

7. Se continúa este procedimiento hasta obtener un término debajo del último término del dividendo, separando inmediatamente los términos del cociente y resto. El número de términos del resto está dado por el número de términos que tiene el último paso.

8. Se suma verticalmente obteniendose los coeficientes del residuo. El grado del cociente y del resto se obtiene tal como se indicó en el Método de Coeficientes separados.

Ejemplo:

$$8x^5 + 14x^4 + 5x^3 + 16x^2 + 3x + 2 : 4x^2 + x + 3$$

Solución:

Grado del cociente:

$$°| q | = °| D | - °| d | = 5 - 2 = 3$$

Grado del residuo:

$$°| r | = °| d | - 1 = 2 - 1 = 1$$

Procedimiento:

		12	- 4	+ 8		
4	8	+ 14	+ 5	+ 16	+ 3	+ 2
-1		- 2	- 6			
			- 3	- 9		
				+ 1	+ 3	
					- 2	- 6
	2	+ 3	- 1	+ 2	4	- 4

cociente — resto

Cociente: $Q(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 2$

Resto: $R(x) = 4x - 4$

d) MÉTODO O REGLA DE RUFFINI

Este método se utiliza para dividir polinomios cuando el divisor es un binomio de primer grado. Se presenta tres casos:

1º Cuando el divisor es de forma $(x \pm b)$

2º Cuando el divisor es de la forma $(ax \pm b)$

3º Cuando el divisor es de la forma $(ax^n \pm b)$

1er. Caso. Forma del divisor: $x \pm b$

1. Se escribe los coeficientes del dividendo en línea horizontal. Completando previamente, si fuese necesario.

2. Se ecribe el término independiente del divisor, con signo cambiado, un lugar a la izquierda y un lugar abajo del primer coeficiente del dividendo.

3. Se divide como en el caso de Horner, teniendo presente que el primer coeficiente del cociente, es igual al primer coeficiente del dividendo.

4. Para obtener los coeficientes del cociente, se separa la última columna, la cual costituye el resto.

Ejemplo:

$$4x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 7x + 8 : x + 1$$

Procedimiento:

	4	- 5	+ 6	+ 7	+ 8
-1	↓	- 4	+ 9	- 15	+ 8
	4	- 9	+ 15	- 8	+ 16 ← resto

coeficientes del cociente

Grado del cociente:

$$°| q | = °| D | - °| d | = 4 - 1 = 3$$

∴ Cociente: $4x^3 - 9x^2 + 15 - 8$

Resto: 16

2do. Caso. Forma del divisor: $a \cdot x \pm b$

1. Se transforma el divisor a la primera forma, sacando en factor común el primer coeficiente del divisor:

$$ax \pm b = a\left(x \pm \frac{b}{a}\right)$$

2. Se divide entre $\left(x \pm \frac{b}{a}\right)$ operando como el primer caso.

3. Los coeficientes del cociente obtenido son divididos entre el coeficiente de "x" del divisor.

4. El resto obtenido no se altera.

Ejemplo:

$$18x^5 - 29x^3 - 5x^2 - 12x - 16 \div 3x + 2$$

Procedimiento:

Factorizando el denominador:

$$3x + 2 = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)$$

	18	- 0	- 29	- 5	- 12	- 16
$-\frac{2}{3}$	↓	- 12	+ 8	+ 14	- 6	+ 12
	18	- 12	+ 21	+ 9	- 18	- 4 ← resto

coeficientes del cociente por 3

Grado del cociente:

$$°|q| = °|D| - °|d| = 5 - 1 = 4$$

Verdaderos coeficientes del cociente:

$$\frac{18 - 12 - 21 + 9 - 18}{3} = 6 - 4 - 7 + 3 - 6$$

$\therefore$ Cociente:

$$q = 6x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 3x - 6$$

Resto: $r = -4$

3er. Caso. Forma del divisor: $a \cdot x^n \pm b$

La resolución sólo es posible por el método de Ruffini cuando los exponentes de la variable del dividendo son multiplos enteros de la variable del divisor. El procedimiento se explica a travéz del siguiente ejemplo:

$$6x^{36} + 17x^{27} - 16x^{18} + 17x^9 + 12 \div 3x^9 + 1$$

Procedimiento:

1. Se observa que los coeficientes de la variable del dividendo sean múltiplos del exponente de la variable del divisor.

2. Se factoriza el divisor:

$$3\left(x^9 + \frac{1}{3}\right)$$

3. Se divide como en el primer caso.

4. Cada uno de los coeficientes del cociente obtenido, se divide entre coeficiente de "x" del divisor.

	6	+ 17	- 16	+ 17	+ 12
$-\frac{1}{3}$	↓	- 2	- 5	+ 7	- 8
	6	+ 15	- 21	+ 24	+ 4 ← resto

coeficientes del resto por 3

Grado del cociente:

$$°|q| = °|D| - °|d| = 36 - 9 = 27$$

Verdaderos coeficientes del cociente:

$$\frac{6 + 15 - 21 + 24}{3} = 2 + 5 - 7 + 8$$

$\therefore$ Cociente: $2x^{27} + 5x^{18} - 7x^9 + 8$

Resto: $+4$

TEOREMA DEL RESTO

Consiste en hallar el resto de una división sin realizar la división.

"El resto de dividir un polinomio en "x", racional y entero, entre un binomio de la forma (a . x ± b), es igual al valor numérico que adquiere dicho polinomio cuando se reemplaza en él x por $\mp$b/a.

REGLA: Para hallar el resto se procede así:

1) Se iguala el divisor a cero:

$$a \cdot x \pm b = 0$$

2) Se despeja "x"

$$x = \frac{\mp b}{a}$$

3) Se reemplaza en el polinomio dividendo la variable "x" por:

$$\mp \frac{b}{a}$$

se efectua operaciones, el resultado es el valor del resto.

$$r = P\left(\mp \frac{b}{a}\right)$$

Ejemplo:

Hallar el resto:

$$6x^4 + 3x^3 - 19x^2 + 14x - 15 : 2x - 3$$

Procedimiento:

1º $\quad 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

2º $\quad r = P\left(\frac{3}{2}\right) = 6\left(\frac{3}{2}\right)^4 + \left(\frac{3}{2}\right)^3$

$$- 19\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 14\left(\frac{3}{2}\right) - 15$$

$r = -3$

DIVISIBILIDAD Y COCIENTES NOTABLES

La finalidad es determinar polinomios desconocidos dadas ciertas condiciones.

PRINCIPIOS DE DIVISIBILIDAD

1º Para determinar la suma de los coeficientes de un polinomio, se iguala la variable o variables a 1.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Suma de coeficientes de:}\\ P(x\,;\,y) = P(1\,;\,1)\end{array}}$$

Ejemplo:

$$P(x, y) = 3x^3 - 2x^2y - 5xy^2 + y^3$$

$$SP\,(1\,;\,1) = 3(1)^3 - 2(1)^2(1) - 5(1)(1)^2 + (1)^3$$

$$SP\,(1\,;\,1) = -3$$

2º El término independientemente se determina haciendo igual a cero la variable a la cual se refiere el polinomio.

$$\boxed{\text{Término independiente} = P(0)}$$

Ejemplo:

$$P(x) = 5x^3 + 2x^2y - 6xy^2 - 8y^3$$

Desde el punto de vista de la variable x:

$$P(0) = 5(0)^3 + 2(0)^2y - 6(0)y^2 - 8y^3$$

$$P(0) = -8y^3$$

por otra parte, para la variable y:

$$P(0) = 5x^3 + 2x^2(0) - 6x(0)^2 - 8(0)^3$$

$$P(0) = 5x^3$$

3º Si un polinomio es divisible separadamente entre dos o más binomios será divisible entre el producto de ellos.

Si: $\quad P(x) : (x - a),\ r = 0$

$P(x) : (x - b),\ r = 0$

$P(x) : (x - c),\ r = 0$

Luego se tendrá:

$$P(x) \div (x - a)(x - b)(x - c), r = 0$$

4° Viceversa, si un polinomio es divisible entre un producto de varios factores, binomios, será divisibles separadamente por cada uno de ellos.

5° En general, si al dividendo y al divisor se le multiplica por una misma cantidad, el resto queda multiplicado por dicha cantidad.

$$\boxed{D \cdot m = d \cdot m \cdot q + r \cdot m}$$

6° Si al dividendo y divisor se divide por una misma cantidad, el resto queda dividido por dicha cantidad.

$$\boxed{\frac{D}{m} = \frac{d}{m} q + \frac{r}{m}}$$

COCIENTES NOTABLES (CN)

Se denomina cociente notable, aquel cociente que no requiere efectuar operaciones para conocer su resultado, porque obedece a ciertas reglas fijas.

FORMA GENERAL DE LOS COCIENTES NOTABLES

$$\boxed{\frac{x^m \pm a^m}{x \pm a}}$$

Se denota en 4 casos:

1er. Caso: es CN $\Leftrightarrow$ "m" es impar.

$$\frac{x^m + a^m}{x + a}$$

2do. Caso: es CN $\Leftrightarrow$ "m" es par.

$$\frac{x^m - a^m}{x + a}$$

3er. Caso: no es CN para cualquier valor de "m".

$$\frac{x^m + a^m}{x - a}$$

4to. Caso: es CN para cualquier valor de "m".

$$\frac{x^m - a^m}{x - a}$$

REGLA PRÁCTICA PARA DESARROLLAR CUALQUIER COCIENTE NOTABLE

1) El primer término del cociente es igual al cociente entre el primer término del dividendo y el primer término del divisor.

2) El último término del cociente es igual al cociente entre el segundo término del dividendo y el segundo término del divisor.

3) A partir del segundo término del cociente el exponente de "x" comienza a disminuir de 1 en 1 hasta "cero".

4) A partir del segundo término del cociente, aparece el segundo término "a" con exponente "1" y comienza a aumentar de 1 en 1 hasta "m - 1".

5) Los signos varían así:

- Cuando el divisor es de la forma "x + a" los signos de los términos del cociente son alternados (+) (-), comenzando con (+).
- Cuando el divisor es de la forma "x - a" los signos de los términos del cociente son todos positivos.

Ejemplo:

i) 1er. Caso:

$$\frac{x^5 + a^5}{x + a} = x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4$$

ii) 2do. Caso:

$$\frac{x^6 - a^6}{x + a} = x^5 - ax^4 + a^2x^3 - a^3x^2 + a^4x - a^5$$

iii) 3er. Caso:

$$\frac{x^7 + a^7}{x - a} = \text{No es CN}$$

iv) 4to. Caso:

$$\frac{x^4 - a^4}{x - a} = x^3 + ax^2 + a^2x + a^3$$

HALLAR UN TERMINO CUALQUIERA "K" DE UN COCIENTE NOTABLE

$$\boxed{t_K = (\text{signo})\, x^{m-K} a^{K-1}}$$

REGLA PARA EL SIGNO:

1) Cuando el divisor es de la forma$(x - a)$, el signo de cualquier término es positivo.

2) Cuando el divisor es de la forma$(x + a)$, los signos son alternadamente positivos y negativos, empezando por positivo.

Por consiguiente, los terminos de lugar par: son negativos, y los términos de lugar impar: son positivos.

Ejemplo:

Hallar los términos t_{10} y t_{15} en el desarrollo del C.N. siguiente:

$$\frac{x^{150} - a^{100}}{x^3 + a^2}$$

Previamente, se busca darle la forma de cociente notable:

$$\frac{(x^3)^{50} - (a^2)^{50}}{(x^3) + (a^2)} = \frac{y^{50} - b^{50}}{y + b}$$

Trabajamos con la forma original de la izquierda:

Término K = 10: $t_{10} = -(x^3)^{50-10}\,(a^2)^{10-1}$
(par)

$$t_{10} = -x^{120}\,a^{18}$$

Término K = 15: $t_{15} = +(x^3)^{50-15}\,(a^2)^{15-1}$
(impar)

$$t_{15} = +x^{105}\,a^{28}$$

CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE PARA QUE EL COCIENTE $\dfrac{x^m \pm a^n}{x^p \pm a^q}$ SEA NOTABLE

Será notable si:

$$\frac{x^m \pm a^n}{x^p \pm a^q} = \frac{(x^p)^r \pm (a^q)^r}{x^p \pm a^q}$$

ésto es: $p\,.\,r = m \quad \Rightarrow \quad r = \dfrac{m}{p} \quad$ (a)

$q\,.\,r = n \quad \Rightarrow \quad r = \dfrac{n}{q} \quad$ (b)

Es decir, será notable $\Leftrightarrow$ $\dfrac{m}{p} = \dfrac{n}{q}$

es número entero

Además:

$$\frac{m}{p} = \frac{n}{q} = \text{número de términos del cociente notable.}$$

Ejemplo:

$$\frac{x^{16} + a^{32}}{x^2 + a^4}$$

$$\#\text{ de términos} = \frac{16}{2} = \frac{32}{4} = 8$$

MÉTODOS DE FACTORIZACIÓN

Factorización es la operación que tiene por objeto transformar una expresión algebraica racional y entera en otra equivalente que sea igual al producto de sus factores primos racionales y enteros.

Los principales métodos para factorizar son los siguientes:

A. FACTOR COMÚN

El factor común de dos o más expresiones algebraicas es la parte numérica y/o literal que está repetida en cada una de dichas expresiones. El factor común puede ser de tres tipos:

- Factor común monomio
- Factor común polinomio
- Factor común por agrupación

A.1) FACTOR COMÚN MONOMIO

Cuando el factor común en todos los términos es un monomio.

Ejemplo:

$$P(,x\ y) = 72x^{2a}y^b + 48x^{a+1}\,y^{b+1} + 24x^ay^{2b}$$

El factor común es $24x^ay^b$, de este modo:

$$P(x,\ y) = 24x^ay^b\,(3x^a + 2xy + y^b)$$

A.2) FACTOR COMÚN POLINOMIO

Cuando el factor común que aparece es un polinomio.

Ejemplo:

$$(a + 1)^7 (a^2 + 1)^{10} - (a + 1)^5 (a^2 + 1)^{11}$$

El factor común es:

$$(a + 1)^5 (a^2 + 1)^{10}$$

luego:

$$(a + 1)^5 (a^2 + 1)^{10} [(a + 1)^2 - (a^2 + 1)]$$

$$(a + 1)^5 (a^2 + 1)^{10} [a^2 + 2a + 1 - a^2 - 1]$$

$$(a + 1)^5 (a^2 + 1)^{10} (2a)$$

$$2a(a + 1)^5 (a^2 + 1)^{10}$$

A.3) FACTOR COMÚN POR AGRUPACIÓN

Sea:

$$x^{m+n} + y^{m+n} + (xy)^m + (xy)^n$$

Efectuando operaciones:

$$x^m x^n + y^m y^n + x^m y^m + x^n y^n$$

agrupando:

$$(x^m x^n + x^m y^m) + (y^m y^n + x^n y^n)$$

factoricemos cada paréntesis:

$$x^m (x^n + y^m) + y^n (y^m + x^n)$$

el factor común es el paréntesis, así:

$$(x^n + y^m) (x^m + y^n)$$

B. MÉTODO DE IDENTIDADES

B.1) DIFERENCIA DE CUADRADOS

$$a^{2m} - b^{2n}$$

o:

$$(a^m)^2 - (b^n)^2$$

$$\therefore \quad (a^m + b^n) (a^m - b^n)$$

B.2) SUMA O DIFERENCIA DE CUBOS

SUMA

$$(a^{3m} + b^{3n}) = (a^m)^3 + (b^n)^3$$

se trata de un producto notable:

$$= (a^m + b^n) (a^{2m} - a^m b^n + b^{2n})$$

DIFERENCIA

$$(a^{3m} - b^{3n}) = (a^m)^3 - (b^n)^3$$

$$= (a^m - b^n) (a^{2m} + a^m b^n + b^{2n})$$

B.3) TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

$$a^{2m} \pm 2a^m b^m + b^{2n} = (a^m \pm b^n)^2$$

C. MÉTODO DEL ASPA

C.1) ASPA SIMPLE

Se usa para factorizar trinomios de la forma:

$$ax^{2n} \pm bx^n \pm c$$

o, de la forma:

$$x^{2n} \pm bx^n \pm c$$

PROCEDIMIENTO.-

Se descompone en dos factores al primer término, ax^{2n} o x^{2n}, según sea el caso. Se coloca estos factores en las puntas de la izquierda del aspa. El término independiente, incluyendo el signo, también se descompone en dos factores, los que se coloca en las puntas de la derecha del aspa. Los factores de la expresión dada son la suma horizontal de arriba y la suma horizontal de abajo. El término central debe ser igual a la suma de los productos en aspa.

Ejemplo: $x^{4n} + 7x^{2n} + 12$

1) x^{4n} en dos factores: $x^{2n} \,.\, x^{2n}$

2) 12 en dos factores: $4 \,.\, 3$

Se coloca los factores en la punta izquierda y derecha del aspa:

$$\begin{array}{ccc} x^{2n} & \times & +4 \\ x^{2n} & & +3 \end{array}$$

3) El término central es la suma de los productos en aspa.

$$3x^{2n} + 4x^{2n} = 7x^{2n}$$

4) Los factores son las sumas horizontales de arriba y abajo.

Luego:

$$x^{4n} + 7x^{2n} + 12 = (x^{2n} + 4)\ (x^{2n} + 3)$$

C.2) ASPA DOBLE

Se usa para factorizar polinomios de la forma:

$$ax^{2n} \pm bx^n y^n \pm cy^{2n} \pm dx^n \pm ey^n \pm f$$

y también para algunos polinomios de 4to. grado.

PROCEDIMIENTO.-

Se ordena en forma decreciente para una de las variables; luego, se traza y se ejecuta un aspa simple para los tres primeros términos con trazo continuo. A continuación y, pegada al primer aspa, se traza otro, de tal modo que el producto de los elementos del extremo derecho de este aspa multiplicados verticalmente sea el término independiente.

1er. factor: suma de los elementos tomados horizontales de la parte superior.

2do. factor: suma de los elementos tomados horizontalmente de la parte inferior.

Ejemplo:

$$12x^2 - 7xy - 10y^2 + 59y - 15x - 63$$

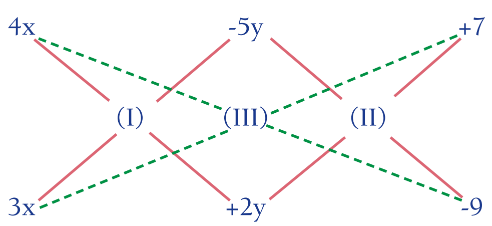
Tomando los tres primeros términos:

1) $12x^2$ en dos factores: $4x \ .\ 3x$

2) $-10y^2$ en dos factores: $-5y\ .\ 2y$

Tomando el último término:

3) -63 en dos factores: $-9\ .\ 7$



Verificando dos términos:

(I)
$$\underbrace{\begin{array}{r} 8xy \\ -15xy \\ \hline -7xy \end{array}}_{\text{2do. término}}$$

(II)
$$\underbrace{\begin{array}{r} 45y \\ 14y \\ \hline +59y \end{array}}_{\text{4to. término}}$$

(III)
$$\underbrace{\begin{array}{r} -36x \\ +21x \\ \hline -15x \end{array}}_{\text{5to. término}}$$

Luego, la expresión factorizada es:

$$(4x - 5y + 7)\ (3x + 2y - 9)$$

D. MÉTODO DE EVALUACIÓN O DE DIVISIORES BINOMIOS

Este método se aplica a polinomios de una sola variable que se caracterizan por anularse para algunos de los divisores de su término independiente afectado de doble signo, o alguna combinación.

Ejemplo: Factorizar

$$P(x) = 2x^4 + x^3 - 9x^2 - 4x + 4$$

Solución:

Los números de prueba son:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm \frac{1}{2}$$

Los números fraccionarios tienen como numerador los divisores del término independiente y como denominador los divisores del coeficiente del término de mayor grado.

para x = -1

$$P(x) = 2 + 1 - 9 - 4 + 4 \neq 0$$

∴ no es divisor

para x = 1

$$P(-1) = 2 - 1 - 9 + 4 + 4 = 0$$

∴ Un divisor es: $(x + 1)$

para $x = 2$

$$P(2) = 32 + 8 - 36 - 8 + 4 = 0$$

$\therefore$ Otro divisor o factor es: $(x - 2)$

Dividiendo $P(x)$ sucesivamente entre los factores obtenidos por el método de Ruffini:

	2	+ 1	- 9	- 4	+ 4
-1		- 2	+ 1	+ 8	- 4
	2	- 1	- 8	+ 4	0
2		+ 4	+ 6	- 4	
	2	+ 3	- 2	0	

Despues de la división se obtiene:

$$P(x) = (x + 1)\,(x - 2)\,(2x^2 + 3x - 2)$$

$$P(x) = (x + 1)\,(x - 2)\,(2x - 1)\,(x + 2)$$

E. METÓDO DE ARTIFICIOS DE CÁLCULO

E.1) REDUCCIÓN A DIFERENCIA DE CUADRADOS

Consiste en sumar y restar una misma cantidad a la expresión dada para transformarla en una diferencia de cuadrados.

Ejemplo: Factorizar:

$$E = a^4 + 2a^2b^2 + 9b^4$$

Sumando y restando $4a^2b^2$:

$E = a^4 + 6a^2b^2 + 9b^4 - 4a^2b^2$

$E = (a^2 + 3b^2)^2 - 4a^2b^2$

$E = (a^2 + 3b^2)^2 - (2ab)^2$

$E = (\ a^2 + 3b^2 + 2ab)\,(a^2 + 3b^2 - 2ab)$

SUMAS Y RESTAS

Consiste en sumar y restar una misma cantidad de tal manera que se forme una suma o una diferencia de cubos y se presenta al factor $x^2 + x + 1$ o $x^2 - x + 1$.

Ejemplo: Factorizar:

$$P(x) = x^5 + x^4 + 1$$

1ra. Forma: Sumando y restando

$$x^3 + x^2 + x:$$

$P(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 - x^3 - x^2 - x$

$P(x) = x^3(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) - x(x^2 + x + 1)$

$\therefore$ $P(x) = (x^2 - x + 1)\,(x^3 + 1 - x)$

2da. Forma: Sumando y restando x^2:

$P(x) = x^5 - x^2 + x^4 + x^2 + 1$

$P(x) = x^2(x^3 - 1) + (x^4 + x^2 + 1)$

Sumando y restando x^2 al segundo paréntesis, factorizando y tambien factorizando el primer paréntesis.

$P(x) = x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1)\,(x^2 - x + 1)$

$P(x) = (x^2 + x + 1)\,(x^3 - x^2 + x^2 - x + 1)$

$\therefore$ $P(x) = (x^2 + x + 1)\,(x^3 - x + 1)$

CAMBIO DE VARIABLE

Consiste en cambiar una variable por otra, de manera que se obtenga una forma de factorización conocida, o que tenga una forma más simple.

Ejemplo: Factorizar:

$$P(x) = 1 + x(x + 1)\,(x + 2)\,(x + 3)$$

Agrupando así:

$$P(x) = 1 + [x(x + 3)][(x + 1)\,(x + 2)]$$

Efectuando:

$$P(x) = 1 + (x^2 + 3x)\,(x^2 + 3x + 2)$$

Haciendo $x^2 + 3x = y$

$$P(x) = 1 + y(y + 2)$$

$$P(x) = 1 + 2y + y^2$$

es el desarrollo de una suma al cuadrado:

$$P(x) = (1 + y)^2$$

sustituyendo la variable:

$$P(x) = (1 + 3x + x^2)^2$$

FACTORIZACIÓN RECÍPROCA

POLINOMIO RECÍPROCO

Es aquel que cuyos coeficientes equidistantes de los extremos son iguales.

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Bx + A$$

Ejemplo: Factorizar el polinomio:

$$P(x) = 6x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 5x + 6$$

PROCEDIMIENTO

Se factoriza x^2:

$$P(x) = x^2 \left(6x^2 + 5x + 6 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}\right)$$

Ordenando así:

$$P(x) = x^2 \left[6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6\right]$$

Haciendo: $x + \frac{1}{x} = y$

entonces:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

sustituyendo:

$$P(x) = x^2\,[6(y^2 - 2) + 5y + 6]$$

Efectuando:

$$P(x) = x^2\,(6y^2 + 5y - 6)$$

Factorizando el paréntesis por el aspa simple:

$$\begin{array}{ccc} 3y & & -2 \\ & \times & \\ 2y & & +3 \end{array}$$

$$\therefore \quad P(x) = x^2(3y - 2)\,(2y + 3)$$

Reponiendo "x":

$$P(x) = x^2 \left[3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\right]\left[2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3\right]$$

$$P(x) = x^2 \left[\frac{3x^2 + 3 - 2x}{x}\right]\left[\frac{2x^2 + 2 + 3x}{x}\right]$$

$$\therefore \quad P(x) = (3x^2 - 2x + 3)\,(2x^2 + 3x + 2)$$

FACTORIZACIÓN SIMÉTRICA ALTERNADA

POLINOMIO SIMÉTRICO

Un polinomio es simétrico, con respecto a sus variables, cuando su valor no se altera por el intercambio de cualquier par de ellas, y además es homogéneo.

Ejemplo:

$$A\,(x^2 + y^2 + z^2) + B(xy + xz + yz)$$

Notar que las operaciones con expresiones simétricas dan como resultado también expresiones simétricas.

POLINOMIO ALTERNO

Un polinomio es alterno, con respecto a sus variables, cuando su signo se altera, pero no su valor absoluto, al intercambiar un par cualquiera de ellas, y además es homogéneo.

Ejemplo:

$$y^2(z - y) + x^2(y - z) + z^2(x - y)$$

PROPIEDADES DE LAS EXPRESIONES Y DE LOS POLINOMIOS SIMÉTRICOS Y ALTERNOS

1º No hay expresiones alternas que contengan más de 2 variables y sean de primer grado.

2º Generalmente los polinomios alternos son circulares o cíclicos y están escritos en forma de diferencia.

3º El producto de una expresión simetrica por una alterna da como resultado una expresión alterna.

4º Una expresión simétrica o alterna de variables x, y, z, si es divisible entre "x", entonces también será divisible entre "y" y entre "z".

5º En una expresión simétrica o alterna, de variables, x, y, z, si es divisible entre $(x \pm y)$, entonces también será divisible entre $(x \pm z)$ $(y \pm z)$.

FACTORIZACIÓN DE UN POLINOMIO SIMÉTRICO Y ALTERNADO

1) Se averigua si el polinomio es simétrico o alterno.

2) Encontrar los factores de la expresión aplicando el teorema del resto y aplicando las propiedades del polinomio simétrcio y alterno.

3) Plantear el cociente, planteando la identidad de dos polinomios y ampliarlo aplicando el criterio de los valores numéricos.

Ejemplo: Factorizar:

$$P(x) = (x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$$

PROCEDIMIENTO

1) Intercambiando x por y, se ve que la expresión es alterna.

2) Cálculo de los factores x = y

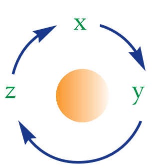
$$P(x) = (y - y)^3 + (y - z)^3 + (z - y)^3$$

$$= 0 + (y - z)^3 + [-(y - z)^3]$$

$$P(x) = (y - z)^3 - (y - z)^3 = 0$$

Luego el polinomio es divisible entre (x - y)

Por ser polinomio alterno, también será divisible entre los factores obtenidos en forma circular en el sentido indicado:



Haciendo $\begin{cases} x = y \\ y = z \\ z = x \end{cases}$

Es decir entre: $(y - z) \wedge (z - x)$

El polinomio es divisible entre el producto:

$$(x - y)(y - z)(z - x)$$

3) Se plantea la identidad de los polinomios:

$$\underbrace{(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3}_{\text{3er. grado}}$$

$$= \underbrace{(x - y)(y - z)(z - x)}_{\text{3er. grado}} \quad \underbrace{Q}_{\text{grado cero}}$$

Si Q es de grado cero quiere decir que es un número.

Dando un juego de valores para x, y, z; se obtiene el valor de Q:

Para x = 1 ; y = 2 ; z = 3:

$$(1 - 2)^3 + (2 - 3)^3 + (3 - 1)^3$$

$$= Q(1 - 2)(2 - 3)(3 - 1)$$

$$(-1) + (-1) + (8) = Q(2)$$

$$\therefore \quad Q = 3$$

Luego, la expresión factorizada es:

$$(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$$

$$= 3(x - y)(y - z)(z - x)$$

MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

MÁXIMO COMÚN DIVISOR (M.C.D.)

De dos o más expresiones algebraicas, es la expresión de mayor grado posible, que está contenida como factor un número entero de veses en dichas expresiones. Para determinar el M C D se factoriza las expresiones comunes con su menor exponente.

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (m.c.m.)

De dos o más expresiones algebraicas, es la expresión de menor grado posible, que contiene un número entero de veces como factor dichas expresiones.

Para determinar el m c m se factoriza las expresiones y se forma el producto de los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

Ejemplo:

Hallar el MCD y el m c m de:

$$A = x^2(x^2 + 2y^2) + (y^2 + z^2)(y + z)(y - z)$$

$$B = x^4 + 2x^2z^2 + z^4 - y^4$$

PROCEDIMIENTO

Efectuando:

$$A = x^4 + 2x^2y^2 + (y^2 + z^2)(y^2 - z^2)$$

$$A = (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - z^4$$

$$A = (x^2 + y^2)^2 - (z^2)^2$$

$$A = (x^2 + y^2 + z^2)\,(x^2 + y^2 - z^2)$$

Mientras que:

$$B = (x^4 + 2x^2y^2 + z^4) - y^4$$

$$B = (x^2 + z^2)^2 - (y^2)^2$$

$$B = (x^2 + z^2 + y^2)\,(x^2 + z^2 - y^2)$$

$$MCD\ (A, B) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$mcm\ (A, B) = (x^2 + y^2 + z^2)\,(x^2 + y^2 - z^2)\,(x^2 + z^2 - y^2)$$

FRACCIONES ALGEBRAICAS

DEFINICIÓN

Se denomina fracción algebraica a toda aquella expresión que tiene por lo menos una letra en el denominador.

Ejemplos:

i) $\dfrac{2}{3x}$

ii) $\dfrac{2a + b}{3c + 1}$

iii) $2ax^{-2}y^3z^{-1}$

CAMBIOS DE SIGNO EN UNA FRACCIÓN

1) CUANDO NO HAY PRODUCTOS INDICADOS

Se puede cambiar dos de sus tres signos y la fracción no se altera.

Ejemplo:

$$F = + \frac{+(m + 1)}{+(n + q)} = - \frac{-(m + 1)}{+(n + q)}$$

$$= - \frac{+(m + 1)}{-(n + q)} = + \frac{-(m + 1)}{-(n + q)}$$

2) CUANDO LA FRACCIÓN TIENE PRODUCTOS INDICADOS

En toda fracción, si se cambia de signo a un número par de factores, la fracción no cambia de signo; si se cambia de signo a un número impar de factores, la fracción sí cambia de signo.

Ejemplo:

$$F = \frac{(a - b)(c - d)}{(e - f)(g - h)}$$

$$F = \frac{-(b - a)(c - d)}{-(f - e)(g - h)} = \frac{(a - b)(c - d)}{(e - f)(g - h)} \Bigg\} \quad \text{par}$$

$$F = \frac{-(b - a)(c - d)}{(f - e)(g - h)} \neq \frac{(a - b)(c - d)}{(e - f)(g - h)} \Bigg\} \quad \text{impar}$$

SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES

Para simplificar fracciones se factoriza.

Ejemplo: Simplificar:

$$P(x) = \frac{x^3 + (2a + b)x^2 + (a^2 + 2ab)x + a^2b}{x^3 + ax^2 + 2bx^2 + b^2x + 2abx + ab^2}$$

Ordenando y factorizando:

$$P(x) = \frac{x(x^2 + 2ax + a^2) + b(x^2 + 2ax + a^2)}{x(x^2 + 2bx + b^2) + a(x^2 + 2bx + b^2)}$$

$$P(x) = \frac{x(x + a)^2 + b(x + a)^2}{x(x + b)^2 + a(x + b)^2} = \frac{(x + a)^2(x + b)}{(x + b)^2\,(x + a)}$$

$$P(x) = \frac{x + a}{x + b}$$

BINOMIO DE NEWTON

DEFINICIÓN

Es el desarrollo de un binomio elevado a la potencia "n".

ANÁLISIS COMBINATORIO

FACTORIAL DE UN NÚMERO

Factorial de un número "n" es el producto de los número consecutivos desde "1" hasta "n". Se denota así: $\lfloor\underline{n}$

o así: $n!$

Ejemplos:

i) $\lfloor\underline{5}$, se lee factorial de 5 = 1 . 2 . 3 . 4 . 5

ii) n!, se lee el factorial de n = 1 . 2 . 3 …

. (n - 1)n

PROPIEDADES DE LOS FACTORIALES

1° Si $\lfloor\underline{n}$ existe, el valor de "n" es entero y positivo.

2° $\lfloor\underline{0} = 1$ y $\lfloor\underline{1} = 1$

3° Si el factorial de un número es igual al factorial de otro, entonces los números son iguales.

Sí: $\lfloor\underline{a} = \lfloor\underline{b}$

$\therefore\ a = b$

4° Debe tenerse en cuenta que:

$$\lfloor\underline{a \pm b} \neq \lfloor\underline{a} \pm \lfloor\underline{b}$$

$$\lfloor\underline{a\,.\,b} \neq \lfloor\underline{a}\ .\ \lfloor\underline{b}$$

$$\left\lfloor\underline{\frac{a}{b}}\right. \neq \frac{\lfloor\underline{a}}{\lfloor\underline{b}}$$

VARIACIONES

Cada una de las ordenaciones, coordinaciones o arreglos que puede formarse tomando algunos o todos de un número de objetos, se llama una variación diferenciándose entre ellas bien en un objeto o bien en una diferente ordenación de los objetos.

De este modo, las variaciones de "n" elementos tomados de "r" en "r" se puede hallar con la siguiente fórmula:

$$\boxed{V_r^n = \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{n-r}}}$$

Ejemplo:

En un campeonato deportivo, participan los equipos a, b, c, d y e. Si los partidos son realizados tanto en la sede de cada uno ("casa o "local"), como en la sede del otro equipo ("visitante"). ¿Cuántos partidos se jugara en total?.

Se trata de hallar cuantas variaciones se puede formarse de 2 en 2.

$$V_2^5 = \frac{\lfloor\underline{5}}{\lfloor\underline{5-2}} = \frac{\lfloor\underline{5}}{\lfloor\underline{3}} = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}{1\,.\,2\,.\,3} = 20$$

PERMUTACIONES

Se llama permutaciones de "n" objetos a los diferentes grupos que con ellos se puede formar, de manera que participando "n" objetos en cada grupo, difieren solamnente en el orden de colocación.

$$\boxed{P_n = \lfloor\underline{n}}$$

Ejemplo:

Hallar el número de permutaciones de las letras a, b, c, d.

$$\boxed{P_4 = \lfloor\underline{4} = 24}$$

COMBINACIONES

Se llama así a los diferentes grupos que se puede formar con "n" elementos tomándolos todos a la vez o de "r" en "r", de manera que los grupos se diferencien por lo menos en un elemento. Para determinar el número de combinaciones de "n" elementos tomados de "r" en "r", se usa la siguiente fórmula:

$$\boxed{C_r^n = \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{r}\ \lfloor\underline{n-r}}}$$

Ejemplo:

¿De cuántas maneras se pueden combinar las vocales a, e, i, o, u tomadas de 2 en 2?

$$C_2^5 = \frac{\lfloor\underline{5}}{\lfloor\underline{2}\ \lfloor\underline{5-2}} = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}{1\,.\,2\,.\,1\,.\,2\,.\,3} = 10$$

PROPIEDADES DE LAS COMBINACIONES

1° COMBINACIONES COMPLEMENTARIAS

Se dice que 2 combinaciones son complementarias cuando el número de combinaciones de "n" elementos tomados de "r" en "r" es igual al número de combinaciones de "n" elementos tomados de "n - r" en "n - r".

$$C_r^n = C_{n-r}^n$$

2º SUMA DE COMBINACIONES

$$C_r^n + C_{r+1}^n = C_{r+1}^{n+1}$$

3º PROPIEDAD SOBRE LOS ÍNDICES

Si C_r^n existe, luego:

a) "n" y "r" son números enteros y positivos

b) $n > r$

4º DEGRADACIÓN DE ÍNDICES

Consiste en descomponer un número conbinatorio en otro que tenga igual índice superior, pero índice inferior disminuyendo en 1.

$$C_r^n = \frac{n - r + 1}{r} = C_{r-1}^n$$

DESARROLLO DEL BINOMIO DE NEWTON
$(x + a)^n$

Para exponente entero y positivo "n"

MÉTODO INDUCTIVO

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + a \,.\, b$$

$$(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x + a \,.\, b \,.\, c$$

$$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = x^4 + (a + b + c + d)x^3 + (a.b + a.c + a.d + b.c + b.d + c.d)x^2 + (a.b.c + a.b.d + b.c.d + a.c.d)x + a.b.c.d$$

Por lo tanto, para "n" factores:

$$(x + a)(x + b)(x + c) \dots (x + k) = x^n + S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} + S_3x^{n-3} + P_n$$

S_1 = Suma de las letras: $a + b + c + \dots + k$

S_2 = Suma de los productos de las "n" letras tomadas de 2 en 2.

S_3 = Suma de los productos de las "n" letras tomadas de 3 en 3.

P_n = Producto de todas las "n" letras.

Si: $a = b = c = \dots = k \Rightarrow$

$$S_1 = C_1^n\, a = \binom{n}{1} a = n \,.\, a$$

$$S_2 = C_2^n\, a^2 = \frac{n(n - 1)}{1 \,.\, 2} a^2$$

$$S_3 = C_3^n\, a^3 = \frac{n(n - 1)(n - 2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} a^3$$

y así, sucesivamente. Además:

$$P_n = a^n$$

Finalmente:

$$(x + a)^n = x^n + C_1^n x^{n-1} a + C_2^n x^{n-2} a^2 + C_3^n x^{n-3} a^3 + \dots + a^n$$

$$(x + a)^n = x^n + n \,.\, x^{n-1} \,.\, a + \frac{n(n - 1)}{1 \,.\, 2} a^2 \,.\, x^{n-2} + \frac{n(n - 1)(n - 2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} a^3 \,.\, x^{n-3} + \dots + a^n$$

Ejemplo:

Desarrollar $(x + a)^4$.

$$(x + a)^4 = x^4 + 4x^{4-1}\, a + \frac{4(4 - 1)}{1 \,.\, 2} a^2 x^{4-2} + \frac{4(4 - 1)(4 - 2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} a^3 x^{4-3} + a^4$$

$$(x + 4)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$$

PROPIEDADES DEL BINOMIO DE NEWTON

1º Su desarrollo es un polinomio completo de (n + 1) términos.

2º Los coeficientes equidistantes de los extremos son iguales.

3º El exponente de "x" en cada término es igual al número de términos que le siguen y el de "a" al que le preceden.

4º El coeficiente del primer término es 1 y el coeficiente del segundo término es igual al exponente del primer término.

5º El coeficiente de cada término es igual al anterior multiplicando por el exponente del "x' anterior y dividido por el del "a" anterior y aumentando en 1.

6º Si los términos del binomio tienen signos contrarios, los términos del desarrollo serán alternativamente positivos y negativos, siendo negativos los que contengan potencias impares del término negativo del binomio. Basta sustituir en el dearrollo "a" por "-a".

7º Si los dos términos del binomio son negativos, todos los términos del desarrollo serán positivos o negativos, según que el exponente sea par o impar. En efecto:

$$(-x - a)^n = [(-1)\ (x + a)]^n$$
$$= (-1)^n\ (x + a)^n$$

8º La suma de los coeficientes del desarrollo es igual a 2 elevado a la potencia del binomio.

$$2^n = 1 + \overset{n}{C_1} + \overset{n}{C_2} + \overset{n}{C_3} + \ldots + \overset{n}{C_n}$$

9º La suma de los coeficientes de los términos de lugar impar es igual a la suma de los de lugar par.

10º Con respecto a las letras "x" y "a", el desarrollo es un polinomio homogéneo de grado "n".

CÁLCULO DE TERMINO GENERAL $t_{(k+1)}$

k = lugar del término anterior al buscado

$$\boxed{t_{k+1} = \overset{n}{C_k}\ .\ x^{n-k}\ .\ a^k}$$

Ejemplo:

Hallar el término 10 del desarrollo de:

$$\left(27x^5 + \frac{1}{3x}\right)^{12}$$

PROCEDIMIENTO:

Nótese que: n = 12

1er. término: $27x^5$

2do. término: $\dfrac{1}{3x}$

$$t_{10} = t_{9+1} = \overset{12}{C_9}\ (27x^5)^{12-9}\ \left(\frac{1}{3x}\right)^9$$

$$t_{10} = \frac{12\ .\ 11\ .\ 10}{1\ .\ 2\ .\ 3}\ (3^3x^5)^3(3^{-9}x^{-9})$$

$$t_{10} = 220x^6$$

TÉRMINO CENTRAL

Se presenta 2 casos:

1) Cuando el exponente es par, de la forma $(x + a)^{2n}$, existe un sólo término central, su lugar se calcula así:

$$\boxed{\frac{2n}{2} + 1 = n + 1}$$

Notar que, en este caso 2n es la potencia del binomio.

2) Cuando el exponente es impar, de la forma: $(x + a)^{2n+1}$, existen 2 términos centrales, y sus lugares se determinan así:

$$\text{1er. Término Central} = \boxed{\frac{(2n + 1) + 1}{2} = n + 1}$$

$$\text{2do. Término Central} = \boxed{\frac{(2n + 1) + 3}{2}\ n + 2}$$

Notar que la potencia del binomio es (2n + 1)

TÉRMINO DE PASCAL O DE TARTAGLIA

Permite determinar los coeficientes de desarrollo del binomio . Se escribe en forma horizontal los coeficientes del desarrollo de las sucesivas potencias del binomio, resulta un triángulo aritmético que se llama Pascal o Tartaglia.

Coeficientes de:

$$
\begin{array}{ll}
(x+a)^0 = & 1 \\
(x+a)^1 = & 1 \quad 1 \\
(x+a)^2 = & 1 \quad 2 \quad 1 \\
(x+a)^3 = & 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
(x+a)^4 = & 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
(x+a)^5 = & 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1
\end{array}
$$

y así sucesivamente.

Ejemplo:

Desarrollar $(x^3 + y^4)^5$

PROCEDIMIENTO

Utilizando el triángulo de Pascal, los coeficientes del binomio a la 5ta. son:

1 ; 5 ; 10 ; 10 ; 5 ; 1

Luego:

$$(x^3 + y^4)^5 = (x^3)^5 + 5(x^3)^4(y^4) + 10(x^3)^3(y^4)^2 + 10(x^3)^2(y^4)^3 + 5(x^3)(y^4)^4 + (y^4)^5$$

$$(x^3 + y^4)^5 = x^{15} + 5x^{12}y^4 + 10x^9y^8 + 10x^6y^{12} + 5x^3y^{16} + y^{20}$$

DESARROLLO DEL BINOMIO DE NEWTON CON EXPONENTE NEGATIVO Y/O FRACCIONARIO

PROPIEDADES:

1º El número de términos es infinito, y al desarrollo se le conoce con el nombre de "Serie Binómica de Newton".

2º Para determinar el desarrollo de $(x + a)^n$ para un número "n" fraccionario y/o negativo, el valor de "x" debe ser uno y además $x > a$. Los valores de a deben estar en el rango $0 < a < 1$.

3º Los términos del desarrollo con respecto a sus signos, no guardan ninguna relación.

4º Para extraer la raíz de un número con aproximación por la serie binómica de Newton, se utiliza la siguiente relación:

$$(1 + x)^{1/m} = 1 + \frac{1}{m}x$$

donde: $0 < x < 1$

Ejemplo: Hallar $\sqrt[5]{921,6}$

Se puede escribir:

$$\sqrt[5]{1\,024 - 102,4} = \sqrt[5]{1\,024\left(1 - \frac{102,4}{1\,024}\right)}$$

$$= \sqrt[5]{1024}\left(1 - \frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{5}} = 4\left(1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10}\right)$$

$$= 4\,(1 - 0,02) = 4(0,98) = 3,92$$

$$\therefore \quad \sqrt{921,6} = 3,92$$

5º Para determinar el término general en el desarrollo se utiliza:

$$\boxed{t_{k+1} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k-1)}{\lfloor k} x^{n-k} a^k}$$

Donde:

n = exponente negativo y/o fraccionario

k = lugar del término anterior al pedido

Ejemplo:

Hallar el término 2 del desarrollo de $(1 - x)^{-3}$

$$t_{1+1} = \frac{(-3)}{\lfloor 1 \;\; \lfloor 4} x^{3-1}\,(1)^1$$

$$t_2 = -3x^2$$

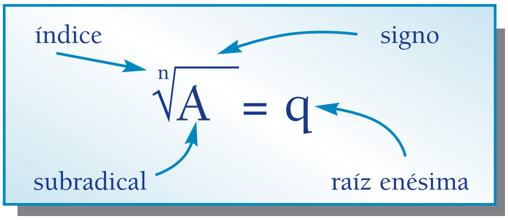
RADIACIÓN

DEFINICIÓN

Es la operación que consiste en hallar una cantidad algebraica llamada raíz, que al ser elevada a un cierto índice, reproduce una cantidad llamada radicando o cantidad subradical. Es la operación contraria a la potenciación.

$$\sqrt[n]{A} = q \qquad \Rightarrow \qquad A = q^n$$

ELEMENTOS DE UNA RAÍZ



SIGNO DE LAS RAÍCES

$$\sqrt[2n]{(+)} = (\pm)$$

$$\sqrt[2n]{(-)} = \text{imaginario}$$

$$\sqrt[2n+1]{(+)} = (+)$$

$$\sqrt[2n+1]{(-)} = (-)$$

Donde: 2n = número par
2n + 1 = número impar

RADICACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

RAÍZ DE UN MONOMIO

REGLA:

1) Se extrae la raíz del signo, de acuerdo con la ley de signos de un radical.
2) Se extrae la raíz del coeficiente.
3) Se divide los exponentes de las letras entre el índice de la raíz.

Ejemplo:

$$\sqrt[5]{-32x^{10}y^{20}z^{-5}} = -2x^{\frac{10}{5}}y^{\frac{20}{5}}z^{\frac{-5}{5}} = -2x^2y^4z^{-1}$$

RAÍZ CUADRADA DE UN POLINOMIO

REGLA:

1) Se ordena y completa el polinomio; luego, se agrupa los términos de 2 en 2, empezando por la derecha.
2) Se halla la raíz cuadrada del primer término (monomio o binomio) del primer grupo de la izquierda, que sera el primer término de la raíz cuadrada del polinomio. Se multiplica esta raíz por sí misma, se cambia de signo y se suma al polinomio dado, eliminándose la primera columna.
3) Se baja los términos que forman el siguiente grupo, se duplica la raíz hallada y se divide el primer término de los bajados entre este duplo. El cociente así hallado es el segundo término de la raíz. Este segundo término de la raíz, con su propio signo, se escribe al lado derecho del duplo del primer término de la raíz formándose un binomio, este binomio se multiplica por dicho segundo término con signo cambiado, sumándose este producto a los dos términos que se habia bajado.
4) Se baja el siguiente grupo de términos. Se duplica la parte de la raíz ya hallada y se divide el primer término del resíduo entre el primero de este duplo, el cociente es el tercer término de la raíz. Este tercer término con su propio signo se escribe al lado del duplo de la raíz hallada y se forma un trinomio, este trinomio se multiplica por dicho tercer término de la raíz con signo cambiado y este producto se suma al resíduo.
5) Se continúa el procedimiento anterior, hasta obtener un resto, cuyo grupo sea una unidad menor que el grado de la raíz o un polinomio idénticamente nulo.

Ejemplo:

$\sqrt{4x^6 - 4x^5 + 13x^4 - 10x^3 + 11x^2 - 6x + 1}$	$2x^3 - x^2 + 3x - 1$
$-4x^6$	$2\,(2x^3) = 4x^3$
$- 4x^5 + 13x^4$	$(4x^3 - x^2)\,(+x^2)$
$+ 4x^5 - x^4$	$2\,(2x^3 - x^2) = 4x^3 - 2x^2$
$+ 12x^4 - 10x^3 + 11x^2$	$(4x^3 - 2x^2 + 3x)\,(-3x)$
$- 12x^4 + 6x^3 - 9x^2$	$2\,(2x^3 - x^2 + 3x) = 4x^3 - 2x^2 + 6x$
$- 4x^3 + 2x^2 - 6x + 1$	$(4x^3 - 2x^2 + 6x - 1)\,(+1)$
$+ 4x^3 - 2x^2 + 6x - 1$	
$-\quad -\quad -\quad -$	

RAÍZ CÚBICA DE UN POLINOMIO

REGLA:

1) Se ordena y completa el polinomio, se separa en grupos de tres términos, emprezando por la drecha.

2) Se extrae la raíz cúbica del primer término del primer grupo de la izquierda (puede estar formado por uno, dos o tres términos), que será el primer término de la raíz, este término se eleva al cubo y se resta del primer término del polinomio dado.

3) Se baja el siguiente grupo formado por los tres términos siguientes del polinomio y se divide el primero de ellos entre el triple del cuadrado de la raíz hallada, el cociente de esta división es el segundo término de la raíz.

4) Se forma 3 productos:

- El triple del cuadrado del primer término de la raíz.
- El triple del primer término de la raíz por el cuadrado del segundo término de la raíz.
- El cubo del segundo término de la raíz.

Se suma los resultados obtenidos, se cambia de signo y se le suma a los tres términos del polinomio que se habia bajado.

5) Se baja el siguiente grupo de términos, dividiéndose el primer término del residuo entre el triple del cuadrado del primer termino de la raíz, el cociente es el tercer término de la raíz.

Se forma 3 grupos:

- El triple del cuadrado de la raíz hallada (1º y 2º término) por el tercer término de la raíz.
- El triple de la raíz hallada por el cuadrado del tercer término de la raíz.
- El cubo del tercer término de la raíz.

Se suma los productos obtenidos, se cambia de signo sus términos y se les suma a los términos del resíduo. Se continúa hasta obtener como residuo un polinomio cuyo grado sea una unidad menor que el doble del grado de la raíz.

Ejemplo:

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
\sqrt[3]{x^6} & - 6x^5 & + 15x^4 & - 20x^3 & + 15x^2 & - 6x & + 1 & x^2 - 2x + 1 \\
\hline
-x^6 & & & & & & & 3\,(x^2)^2 = 3x^4 \\
\hline
 & - 6x^5 & + 15x^4 & - 20x^3 & & & & (-6x^5) : (3x^4) = -2x \\
\hline
 & + 6x^5 & - 12x^4 & + 8x^3 & & & & \text{a) } 3\,(x^2)^2\,(-2x) = -6x^5 \\
\hline
 & & + 3x^4 & - 12x^3 & + 15x^2 & - 6x & + 1 & \text{b) } 3\,(x^2)\,(-2x)^2 = +12x^4 \\
 & & - 3x^4 & + 12x^3 & - 15x^2 & + 6x & - 1 & \text{c) } (-2x)^3 = -8x^3 \\
\hline
 & & - & - & - & - & - & = 6x^5 + 12x^4 - 8x^3 \\
\hline
 & & & & & & & (3x^4) : (3x^4) = 1 \\
\hline
 & & & & & & & \text{a) } 3\,(x^2 - 2x)^2\,(1) = 3x^4 - 12x^3 + 12x^2 \\
 & & & & & & & \text{b) } 3\,(x^2 - 2x)\,(1)^2 = 3x^2 - 6x \\
 & & & & & & & \text{c) } (1)^3 = 1 \\
\hline
 & & & & & & & = 3x^4 - 12x^3 + 15x^2 - 6x + 1
\end{array}
$$

DESCOPOSICIÓN DE RADICALES DOBLES EN SIMPLES

A) Forma:

$$\boxed{\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+K}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-K}{2}}}$$

Donde: $K = \sqrt{A^2 - B}$

Ejemplo: Descomponer en radicales simples:

$$\sqrt{3 + \sqrt{5}}$$

PROCEDIMIENTO:

$$\sqrt{3 + \sqrt{5}} = \sqrt{\frac{A+K}{2}} + \sqrt{\frac{A-K}{2}} \quad \text{(I)}$$

Cálculo de K:

$$K = \sqrt{A^2 - B} = \sqrt{3^2 - 5} = \sqrt{4} = 2$$

Sustituyendo en (1):

$$\sqrt{3 + \sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3+2}{2}} + \sqrt{\frac{3-2}{2}}$$

$$\sqrt{3 + \sqrt{5}} = \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$$

B) Forma:

$$\boxed{\sqrt{A + \sqrt{B} + \sqrt{C} + \sqrt{D}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}$$

Ejemplo:

Descomponer en radicales simples:

$$\sqrt{10 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}}$$

PROCEDIMIENTO:

$$\sqrt{10 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

Elevando al cuadrado:

$$10 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15} = x + y + z + 2\sqrt{xy} + 2\sqrt{xz} + 2\sqrt{yz}$$

Identificando las partes racionales e irracionales:

$$x + y + z = 10 \qquad (1)$$

$$2\sqrt{x \,.\, y} = 2\sqrt{6} \quad \Rightarrow \quad x \,.\, y = 6 \qquad (2)$$

$$2\sqrt{x \,.\, z} = 2\sqrt{10} \quad \Rightarrow \quad x \,.\, z = 10 \qquad (3)$$

$$2\sqrt{y \,.\, z} = 2\sqrt{15} \quad \Rightarrow \quad y \,.\, z = 15 \qquad (4)$$

Multiplicando: (2) por (3) por (4):

$$x^2y^2z^2 = (3 \,.\, 2)\,(5 \,.\, 2)\,(5 \,.\, 3) = 2^2 \,.\, 3^2 \,.\, 5^2$$

$$\therefore \qquad x \,.\, y \,.\, z = 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \qquad (5)$$

Sustituyendo (2) en (5): $z = 5$

Sustituyendo (3) en (5): $y = 3$

Sustituyendo (4) en (5): $x = 2$

$$\therefore \sqrt{10 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$$

C) Forma:

$$\sqrt[3]{A + \sqrt{B} - \sqrt{C} - \sqrt{D}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y} \pm \sqrt{z}$$

Se procede igual que la forma anterior.

D) Forma:

$$\sqrt[3]{A \pm \sqrt{B}} = x \pm \sqrt{y}$$

Llamando:

$$C = \sqrt[3]{A^2 - B}$$

$$y = x^2 - C$$

Se resuelve $A = 4x^3 - 3xC$ por tanteos para "x".

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}$$

PROCEDIMIENTO:

Primero: $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} = x + \sqrt{y}$

Ahora cálculo deC:

$$C = \sqrt[3]{7^2 - 50} = -1$$

Sustituyendo valores en:

$$A = 4x^3 - 3xC$$
$$7 = 4x^3 - 3x\,(-1)$$
$$7 = 4x^3 + 3x$$

Donde por tanteo:

$$x = 1$$

Sustituyendo valores en:

$$y = x^2 - C$$
$$y = 1^2 - (-1)$$
$$y = 2$$

$$\therefore \qquad \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$$

OPERACIONES CON RADICALES

CONCEPTOS BÁSICOS

RADICALES HOMOGÉNEOS

Son aquellos que tienen iguales índices.

Ejemplo:

$$\sqrt[5]{x^4z^2} \;;\; \sqrt[5]{y^2x} \;;\; \sqrt[5]{x}$$

HOMOGENIZACIÓN DE RADICALES

Es la operación que se realiza para pasar radicales de distinto índice, a radicales de índice iguales.

Ejemplo:

Homogenizar:

$$\sqrt[3]{a^2b} \;;\; \sqrt[4]{b^3} \;;\; \sqrt[5]{c^4d}$$

PROCEDIMIENTO:

1) Se halla m c m de los indices; éste será el índice común.

$$\text{mcm: } 3, 4, 5 = 60$$

2) Se afecta del índice común y se eleva cada cantidad subradical a un exponente que resulta de dividir el índice común entre su índice original.

$$\sqrt[60]{(a^2b)^{\frac{60}{3}}} \;;\; \sqrt[60]{(b^3)^{\frac{60}{4}}} \;;\; \sqrt[60]{(c^4d)^{\frac{60}{5}}}$$

efectuando las operaciones se obtiene:

$$\sqrt[60]{a^{40}b^{20}} \;;\; \sqrt[60]{b^{45}} \;;\; \sqrt[60]{c^{48}b^{12}}$$

RADICALES SEMEJANTES

Son aquellos qie tienen igual índice e igual radicando.

Ejemplo:

$$3x\sqrt[3]{3b} \;;\; 8y\sqrt[3]{3b} \;;\; 2\sqrt[3]{3b}$$

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LOS RADICALES

Si se multiplica o divide el índice del radical y el radicando por un mismo número, no varía el valor aritmético, pero el número de valores algebraicos de las posibles raízes queda multiplicado o dividido por ese mismo número:

Sea:

$$\sqrt[n]{B^m} = b$$

multiplicando índice y exponente por "r":

$$\sqrt[n.r]{B^{m.r}}$$

notar que:

$\sqrt[n]{B^m}$ tiene "n" raíces

$\sqrt[n.r]{B^{m.r}}$ tiene "n . r" raíces

OPERACIONES ALGEBRAICAS CON RADICALES

SUMA Y RESTA DE RADICALES

Para sumar radicales semejantes basta sacar como factor común el radical; si no son semejantes, se deja indicado.

Ejemplo:

$$3x\sqrt[3]{3b} + 8y\sqrt[3]{3b} + 2\sqrt[3]{3b} = \sqrt[3]{3b}\,(3x + 8y + 2)$$

MULTIPLICACIÓN DE RADICALES

1) Cuando son homogéneos:

$$\sqrt{A} \,.\, \sqrt{B} = \sqrt{A\,.\,B}$$

2) Cuando tienen índices distintos.

Se reduce a un índice común y se opera igual que en el caso anterior, así:

$$\sqrt[p]{x} \,.\, \sqrt[q]{y} = \sqrt[pq]{x^q} \,.\, \sqrt[pq]{y^p} = \sqrt[pq]{x^qy^p}$$

DIVISIÓN DE RADICALES

1) Cuando son homogéneos:

$$\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}=\sqrt[n]{\frac{A}{B}}$$

2) Cuando son homogéneos.

Previamente se homogeniza y se procede como se indicó en el caso anterior:

$$\frac{\sqrt[p]{A}}{\sqrt[q]{B}}=\frac{\sqrt[pq]{A^q}}{\sqrt[pq]{B^p}}=\sqrt[pq]{\frac{A^q}{B^p}}$$

POTENCIAL DE RADICALES

$$\left(\sqrt[n]{B}\right)^p=\sqrt[n]{B^p}$$

RAÍZ DE RADICALES

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{B}}=\sqrt[nm]{B}$$

FRACCIÓN IRRACIONAL

Es aquella cuyo denominador tiene raíz algebraica.

RACIONALIZACIÓN

Es una operacion que consiste en modificar un quebrado en cuyo denominador hay una raíz algebraica (fracción irracional) y transformarla a otra que no tenga raíz en el denominador.

FACTOR RACIONALIZANTE (F.R.)

El factor racionalizante de una expresión irracional es también otra expresión irracional que, multiplicada por la primera, la convierte en una expresión racional.

RACIONALIZACIÓN DEL DENOMINADOR DE UNA FRACCIÓN

PRIMER CASO

Cuando la fracción presenta, en el denominador, radicales en forma de producto.

Ejemplo:

Racionalizar: $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}\ .\ \sqrt[5]{b^3}}$

PROCEDIMIENTO:

Se multiplica numerador y denominador por el literal elevado a un exponente igual a lo que le falta al exponente del literal para equivaler a la unidad.

De este modo:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{a}\ .\ \sqrt[5]{b^3}}=\frac{1}{a^{1/4}\ .\ b^{3/5}}\cdot\frac{a^{3/4}\ .\ b^{2/5}}{a^{3/4}\ .\ b^{2/5}}=\frac{\sqrt[4]{a^3}\ .\ \sqrt[5]{b^2}}{a\ .\ b}$$

SEGUNDO CASO

Cuando la fracción presenta en su denominador una suma de raíces algebraicas; para racionalizar, se utiliza el criterio denominado como la conjugada real.

Ejemplo:

i) Racionalizar: $\dfrac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

$$\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{m}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}$$

$$\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{m\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b}$$

ii) Racionalizar: $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{a+b}}$

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{a+b}}=\frac{1}{\left[\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)-\sqrt{a+b}\right]}$$

$$\cdot\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a+b}\right)}{\left[\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a+b}\right]}$$

$$=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a+b}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-\left(\sqrt{a+b}\right)^2}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a+b}\right)}{2\sqrt{a\ .\ b}}\cdot\frac{\sqrt{a\ .\ b}}{\sqrt{a\ .\ b}}$$

$$=\frac{\sqrt{a\ .\ b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a+b}\right)}{2\ .\ a\ .\ b}$$

TERCER CASO

Cuando la fracción presenta en su denominador una suma algebraica de radicales de índice superior a 2. Se procede así:

- Si el índice es una potencia de 2, se utiliza el criterio de la conjugada en forma sucesiva.
- Si el índice es 3, es necesario tener en cuenta las siguientes identidades:

$$a + b = \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{b}\right)^3$$

$$= \left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right)$$

$$a - b = \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{b}\right)^3$$

$$= \left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right)$$

Ejemplo:

Racionalizar: $\dfrac{1}{\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{b}}$

Solución:

Multiplicando por la conjugada y luego aplicando las identidades anteriores se logra racionalizar:

$$\frac{1}{\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{b}} = \frac{1}{\left(\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{b}\right)} \cdot \frac{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}$$

$$= \frac{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}{\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)} \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right)}$$

$$= \frac{\left(\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right)}{a - b}$$

CUARTO CASO

Si el índice es mayor que 3, y pertenece a una de las formas:

1) $\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$

2) $\sqrt[n]{a^{n-1}} \mp \sqrt[n]{a^{n-2}\,b} + \sqrt[n]{a^{n-3}\,b^2}$

$$\mp \sqrt[n]{a^{n-4}\,b^3} + \ldots \mp \sqrt[n]{b^{n-1}}$$

Previamente, debe recordarse que para todo valor de "n":

$$\left(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}\right)\left(\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \sqrt[n]{a^{n-3}b^2} + \ldots + \sqrt[n]{b^{n-1}}\right) = a - b$$

Sin embargo, para valores impares de "n":

$$\left(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{n}\right)\left(\sqrt[n]{a^{n-1}} - \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \sqrt[n]{a^{n-3}b^2} - \ldots + \sqrt[n]{b^{n-1}}\right) = a + b$$

y, para valores pares de "n":

$$\left(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}\right)\left(\sqrt[n]{a^{n-1}} - \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \sqrt[n]{a^{n-3}b^2} - \ldots + \sqrt[n]{b^{n-1}}\right) = a - b$$

Uno de los factores es utilizado como el F.R.

Ejemplo: Racionalizar:

$$\frac{N}{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2y} + \sqrt[4]{xy^2} + \sqrt[4]{y^3}}$$

Si al denominador se le multiplica por $\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}$, se obtiene x - y, por consiguiente el factor racionalizante es $\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}$.

$$E = \frac{N\left(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}\right)}{x - y}$$

VERDADERO VALOR DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

CONCEPTOS

FRACCIONES DETERMINADAS

Son la siguientes:

$$\frac{a}{0}\ ,\ \frac{0}{a}\ ,\ \frac{\infty}{a}\ ,\ \frac{a}{\infty}\ ,\ \frac{\infty}{0}\ ,\ \frac{0}{\infty}$$

Estas formas determinadas son definidas como:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a}{x} = \infty$

2) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{a}{x} = 0$

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{a} = \infty$

4) $\lim\limits_{\substack{a \to \infty \\ x \to 0}} \dfrac{x}{a} = 0$

5) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{a} = 0$

6) $\lim\limits_{\substack{a \to \infty \\ x \to 0}} \frac{a}{x} = \infty$

La expresión: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a}{x}$

Se lee: "limite de la fracción $\frac{a}{x}$ cuando "x" tiende a cero".

VERDADERO VALOR(V.V.)

Cuando para ciertos valores de la variable, una expresión adquiere muchos valores, se dice que la expresión es de la forma indeterminada. Por esta razón, se busca su "verdadero valor", siendo éste el valor de otra que sea su equivalente. A este procedimiento se denomina "llevar indeterminación.

FORMAS INDETERMINADAS

Matemáticamente, no son definibles:

$$\frac{0}{0} \; , \; \frac{\infty}{\infty} \; \infty - \infty \; , \; 0 \, . \, \infty \; , \; 1^{\infty} \; , 0^{0}$$

CÁLCULO DEL VERDADERO VALOR

A) FORMA $\frac{0}{0}$

Para levantar esta inderminación debe tenerse en cuenta que tanto en el numerador como en el denominador está el factor cero, que se debe de eliminar, por lo tanto:

- Se factoriza el numerador y el denominador buscando el factor cero (por ejemplo: x - a = 0, cuado "x" tiende a "a").
- Se simplifica en el numerador y denominador de la fracción este factor.
- Se sustituye nuevamente x = a. Si persiste la indeterminación, se repite hasta hallar el verdadero valor.

Ejemplo:

Hallar el verdadero valor de la fracción:

$$E = \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 + x - 12} \text{ , para } x = 3$$

PROCEDIMIENTO:

$$E = \frac{2(3)^2 - 5(3) - 3}{(3)^2 + (3) - 12} = \frac{0}{0}$$

Esta forma es indeterminada, quiere decir que en el numerador y en el denominador hay un factor de la forma "x - a". Hay que factorizarlo y luego simplificarlo.

1) Factorizando:

$$E = \frac{(2x + 1)\,(x - 3)}{(x + 4)\,(x - 3)}$$

ese factor es: "x - 3"

2) Simplificando:

$$E = \frac{2x + 1}{x + 4}$$

3) Para x = 3:

$$E = \frac{2(3) + 1}{3 + 4} = \frac{7}{7} = 1$$

$\therefore$ V.V.(E) = 1

B) FORMA $\frac{\infty}{\infty}$

Para levantar la indeterminación de esta forma, se divide numerador y denominador entre la máxima potencia de la variable cuya presencia provoca la indeterminación.

REGLA PRÁCTICA:

1) Si el numerador es de mayor grado que el denominador, el V.V. es ∞ ; es decir:

si: $°|\,N\,| > °|\,D\,| \Rightarrow$ V.V.(E) = ∞

2) Si el numerador es de menor grado que el denominador. el V.V. es 0, es decir:

si: $°|\,N\,| < °|\,D\,| \Rightarrow$ V.V.(E) = ∞

3) Si el numerador y el denominador son de igual grado, el V.V. es un cociente formado por los coeficientes de los términos de máxima potencia del numerador y denominador; es decir:

si: $°|\,N\,| = °|\,D\,|$, entonces:

$$\text{V.V.(E)} = \frac{\text{Coeficiente de mayor grado de N}}{\text{Coeficiente de mayor grado de D}}$$

Ejemplo:

Hallar el V.V. de la fracción:

$$E = \frac{2x^3 + 3x^2 + 3x + 7}{6x^3\; 2x^2 + 5x \; + 1} \text{ ; para } x \to \infty$$

Sustituyendo x por ∞:

$$E = \frac{2(\infty) + 3(\infty) + 3(\infty) + 7}{6(\infty) + 2(\infty) + 5(\infty) + 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

Para levantar la indeterminación se divide de numerador y denominador entre la variable elevada a su mayor exponente:

$$E = \frac{\dfrac{2x^3}{x^3} + \dfrac{3x^2}{x^3} + \dfrac{3x}{x^3} + \dfrac{7}{x^3}}{\dfrac{6x^3}{x^3} + \dfrac{2x^2}{x^3} + \dfrac{5x}{x^3} + \dfrac{1}{x^3}}$$

$$= \frac{2 + \dfrac{3}{x} + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{7}{x^3}}{6 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}}$$

Para $(x + \infty)$:

$$V.V.(E) = \frac{2 + 0 + 0 + 0}{6 + 0 + 0 + 0} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

C) FORMA ∞ - ∞

Cuando se presenta esta forma de indeterminación, se lleva a la forma ∞/∞ y se procede como tal.

Ejemplo:

Hallar el V.V. de:

$$E = \sqrt{2x^2 + 3x + 1} - x\sqrt{2} \;\; ; \text{ cuando } x \to \infty$$

Sustituyendo:

$$E = \sqrt{2(\infty) + 3(\infty) + 1} - \infty\sqrt{2} = \infty - \infty$$

Para levantar esta indeterminación se multiplica y divide por la conjugada de la expresión:

$$E = \frac{\left(\sqrt{2x^2 + 3x + 1} - x\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2x^2 + 3x + 1} + x\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2x^2 + 3x + 1} + x\sqrt{2}\right)}$$

Efectuando:

$$E = \frac{2x^2 + 3x + 1 - 2x^2}{\sqrt{2x^2 + 3x + 1} + x\sqrt{2}} = \frac{3x + 1}{\sqrt{2x^2 + 3x + 1} + x\sqrt{2}}$$

Dividiendo numerador y denominador entre x:

$$E = \frac{3 + \dfrac{1}{x}}{\sqrt{2 + \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2}} + \sqrt{2}}$$

Para $x \to \infty$:

$$V.V.\ (E) = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

D) FORMA 0 . ∞

Cuando una expresión algebraica toma la forma 0 . ∞, su V.V. se obtiene efectuando primero las operaciones indicadas y, luego, simplificando y reemplazando x = a. Si subsiste la indeterminación, se transforma a una de las formas anteriores y se procede.

Ejemplo:

Hallar el verdadero valor de:

$$E = \left(\frac{1}{x + 3} - \frac{1}{3x - 1}\right)\left(\frac{7}{x^2 + 6x - 16}\right)$$

para: x = 2

Procedimiento:

Para x = 2, se obtiene 0 . ∞(forma indeterminada)

Efectuando operaciones:

$$E = \left[\frac{3x - 1 - x - 3}{(x + 3)(3x - 1)}\right]\left[\frac{7}{(x + 8)(x - 2)}\right]$$

$$= \left[\frac{2(x - 2)}{(x + 3)(3x - 1)}\right]\left[\frac{7}{(x + 8)(x - 2)}\right]$$

Simplificando (x - 2):

$$E = \frac{14}{(x + 3)(3x - 1)(x + 8)}$$

para: x = 2:

$$V.V.\ (E) = \frac{14}{(5)\ (5)\ (10)} = \frac{7}{125}$$

CANTIDADES IMAGINARIAS

CONCEPTOS

DEFINICIÓN

Cantidades imaginarias son las raíces de índice par de cantidades negativas:

Ejemplos:

i) $\sqrt{-3}$

ii) $\sqrt[6]{-5}$

iii) $\sqrt[8]{-64}$

UNIDAD IMAGINARIA

Según la notación de Gauss:

$$\sqrt{-1} = i$$

de donde: $i^2 = -1$

Ejemplo:

$$\sqrt{-16} = \sqrt{16} \,.\, \sqrt{-1} = 4i$$

POTENCIAS DE LA UNIDAD IMAGINARIA

1) $i^1 = \left(\sqrt{-1}\right)^1 = i$

2) $i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$

3) $i^3 = i^2 \,.\, i = -i$

4) $i^4 = i^2 \,.\, i^2 = 1$

5) $i^5 = i^4 \,.\, i = i$

6) $i^6 = i^4 \,.\, i^3 = -1$

7) $i^7 = i^4 \,.\, i^3 = -i$

8) $i^8 = i^4 \,.\, i^4 = 1$

NÚMEROS COMPLEJOS

Se llama así a un número de la forma "a + bi", donde "a" y "b" son números reales.

COMPLEJOS IGUALES

Son los que tienen iguales sus partes reales e iguales sus partes imaginarias.

Ejemplo:

$$a + bi = c + di$$

$$\Leftrightarrow \quad a = c \quad \wedge \quad b = d$$

COMPLEJOS CONJUGADOS

Son los que tienen iguales sus partes reales; e iguales, pero de signos contrarios sus partes imaginarias.

Ejemplo:

$$z_1 = a + bi$$

$$z_2 = a - bi$$

COMPLEJOS OPUESTOS

Son los que tienen iguales sus partes reales e imaginarias, pero de signos contarios.

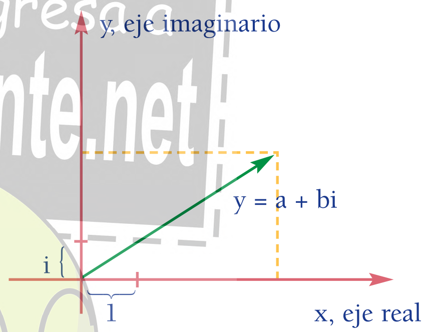
Ejemplo:

$$z_1 = a + bi$$

$$z_2 = -a - bi$$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN COMPLEJO

1) REPRESENTACIÓN CARTESIANA

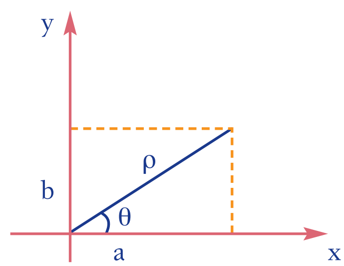


Sea: y = a + bi

Unidad sobre el eje y: i

Unidad sobre el eje x: 1

2) REPRESENTACIÓN POLAR O TRIGONOMÉTRICA



$\boxed{\rho = \sqrt{a^2 + b^2}}$ módulo o radio vector.

$\boxed{\theta = \text{arco tg } \dfrac{b}{a}}$ argumento.

Con apoyo en la figura, la forma polar de a + bi, se calcula así:

$$a + bi = \rho \cos\theta + i\,\rho\,\text{sen}\,\theta$$

$$\boxed{a + bi = \rho\,(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)}$$

Ejemplo:

Expresar en forma polar: 8 + 6i

PROCEDIMIENTO:

Se sabe que:

$$8 + 6i = \rho\,(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

Cálculo de ρ y θ:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

$$\theta = \text{arco tg}\,\frac{b}{a} = \text{arco tg}\,\frac{6}{8} = \text{arco tg}\,\frac{3}{4} = 37^\circ$$

$$\therefore\ 8 + 6i = 10\,(\cos 37^\circ + i\,\text{sen}\,37^\circ)$$

OPERACIONES CON COMPLEJOS

1) SUMA

$$z_1 = a + bi$$

$$z_2 = c + di$$

$$\boxed{z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)\,i}$$

2) MULTIPLICACIÓN

$$(a + bi)\,(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$$

$$\therefore\ (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)\,i$$

En forma polar:

$$z_1 = a + bi = \rho_1\,(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)$$

$$z_2 = c + di = \rho_2\,(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$$

$$z_1 \,.\, z_2 = \rho_1\,(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)\,\rho_2\,(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$$

$$= \rho_1 \,.\, \rho_2[(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2)$$

$$+ i\,(\text{sen}\,\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2)$$

$$\boxed{z_1 \,.\, z_2 = \rho_1 \,.\, \rho_2[\,\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}\,(\theta_1 + \theta_2)]}$$

3) DIVISIÓN

Dividir $z_1 : z_2$, sí:

$$z_1 = a + bi$$

$$z_2 = c + di$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + b}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)}$$

$$= \frac{(ac + bd) + (bc - ad)\,i}{c^2 - d^2i^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\right) + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right) . \; i$$

Forma polar:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)}{\rho_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)} \cdot \frac{(\cos\theta_2 - i\,\text{sen}\,\theta_2)}{(\cos\theta_2 - i\,\text{sen}\,\theta_2)}$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}\,(\theta_1 - \theta_2)\right]}$$

4) POTENCIA.- Fórmula de Moivre:

$$\boxed{[\rho\,(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta\,)]^n = \rho^n\,(\cos n\theta\ + i\,\text{sen}\,n\theta\,)}$$

5) RAÍZ

$$\boxed{\sqrt[n]{\rho\,(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)} = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2K\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta + 2K\pi}{n}\right)\right]}$$

Donde K = 0, 1, 2, 3, …, (n - 1)

DETERMINANTES

MATRIZ

Matriz es una herramienta matemática que permite, en principio, resolver ecuaciones simultáneas de primer grado.

DEFINICIÓN

Matriz es todo arreglo rectangular de elementos del conjunto de números reales, vectoriales, tensores, números complejos, etc. colocados en filas y en columnas perfectamente definidas.

Ejemplos:

$$i)\ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$ii)\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3i & \sqrt{7} \\ 4 & 9 & 5 & 1/3 \\ \sqrt{2} & 3i & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

DTERMINANTE

DEFINICIÓN

Determinante es el desarrollo de una "matriz cuadrada"; se le representa simbólicamente encerrando la matriz entre dos barras verticales.

ORDEN DEL DETERMINANTE

El "orden" del determinante, como es una matriz cuadrada, está expresado o por el número de "filas" o por el número de "columas" que tiene la matriz.

La "matriz" es "cuadrada" cuando el número de filas es igual al número de columnas.

DETERMINANTE DE SEGUNDO ORDEN

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Δ = valor del determinante

elementos del determinante: a_1, a_2, b_1, b_2

COLUMNAS : (a_1b_1) y (a_2b_2)

FILAS : (a_1a_2) y (b_1b_2)

DIAGONAL PRINCIPAL : $(a_1\ b_2)$

DIAGONAL SECUNDARIA : (b_1a_2)

VALOR DEL DETERMINANTE DE SEGUNDO ORDEN

Es igual a la diferencia de los productos de la diagonal principal y diagonal secundaria.

diagonal secundaria

(-)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2$$

(+)

diagonal principal

Ejemplo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & +5 \\ +2 & -7 \end{vmatrix} = (-3)(-7) - (+2)(+5) = 21 - 10 = 11$$

DETERMINANTE DE TERCER ORDEN

Es el desarrollo de una matriz cuadradade 3 filas y 3 columnas.

MÉTODOS PARA HALLAR EL VALOR DE UN DETERMINANTE

Para determinar el valor de determinantes de 3º orden u orden superior, se utiliza la "Regla de Sarrus" o el método de "menores complementarios".

REGLA DE SARRUS

1) Se repite las filas primer y segunda debajo de la tercera.

2) Se toman con signo positivo la diagonal principal y sus paralelasy con signo negativo la diagonal secundaria y sus paralelas.

3) Se efectúan las operaciones con los signos considerados.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-) \\ (-) \\ (-) \\ (+) \\ (+) \\ (+) \end{matrix}$$

$$\Delta = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3$$

Ejemplo: Desarrollar:

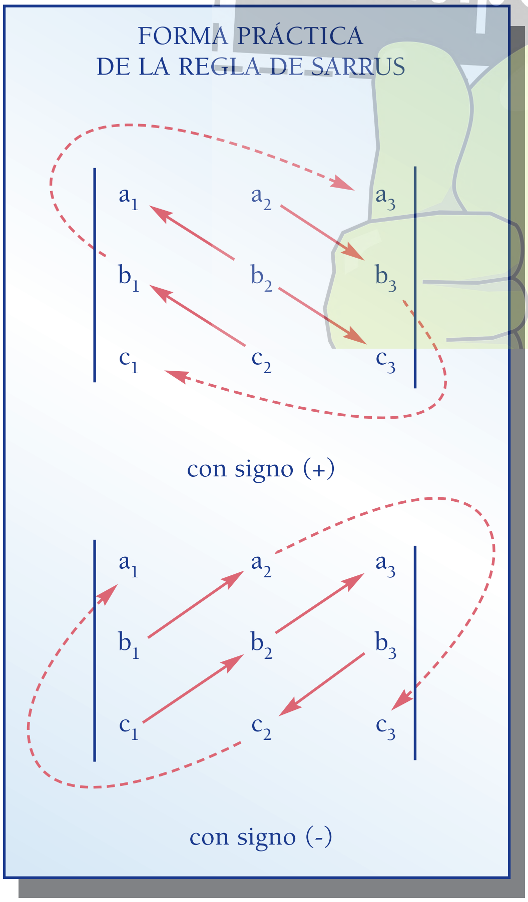
$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-) \\ (-) \\ (-) \\ (+) \\ (+) \\ (+) \end{matrix}$$

$$\Delta = 1 . 5 . 9 + 4 . 8 . 3 + 7 . 2 . (-6) - 7 . 5 . 3$$

$$- 1 . 8 . (-6) - 4 . 2 . 9$$

$$\Delta = 45 + 96 - 84 - 105 + 48 - 72$$

$$\Delta = -72$$



MENOR COMPLEMENTARIO

El menor complementario de un elemento de un determinante, es otro determinante de menor orden, que resulta despúes de suprimir en el determinante los elementos que pertenecen a la fila y la columna de dicho elemento.

Ejemplo:

Escribir el menor complementario del elemento b_2 en el siguiente determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}$$

Δ_1 = menor complementario de Δ del elemento b_2.

1) Si la suma es par el elemento tiene signo (+).

2) Si la suma es impar el elemento tiene signo (-).

Ejemplo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

El elemento "c_2" pertenece a la 3ra. fila: 3 y a la 2da. columna: 2, luego:

$$S = 3 + 2 = 5 \quad \Rightarrow \quad \text{signo}(-)$$

El elemento "a_3" es de la 1ra. fila: 1y de la 3ra. columna: 3, luego:

$$S = 1 + 3 = 4 \quad \Rightarrow \quad \text{signo}(+)$$

DESARROLLO DE UN DETERMINANTE POR MENORES COMPLEMENTARIO

" Todo determinante es igual a la suma algebraica de los productos que se obtiene multiplicando cada uno de los elementos de una línea cualquiera (fila o columna) por sus respectivos menores complementarios, colocando a cada producto el signo del elemento".

Ejemplo:

Hallar el valor del determinante.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 9 & 16 & 25 \end{vmatrix}$$

Desarrollandolo por menores complementarios, tomando la primera fila.

$$\Delta = (1)\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 16 & 25 \end{vmatrix} - (4)\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 25 \end{vmatrix} + (2)\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 16 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (1)(100 - 80) - (4)\,(75 - 45) + (2)(48 - 36)$$

$$\Delta = 20 - 120 + 24 = -76$$

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

1° Si en un determinante se cambia las filas por columnas y las columnas por filas, el valor de determinante no se altera.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

2° Si en un determinante se intercambia entre sí dos filas o dos columnas, el determinante cambia de signo.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix}$$

3° Si el determinante tiene dos filas o dos columnas iguales, el determinante es igual a cero.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

4° Si en un determinante se multiplica o divide todos los elementos de una fila o una columna por un mismo número, el determinante queda multiplicado o dividido por este número.

Sea:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Si:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} na_1 & a_2 \\ nb_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \Delta_1 = n\Delta$$

ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES

DEFINICIÓN

Ecuación es una igualdad que contiene una o más incognitas.

CLASES DE IGUALDAD

Hay dos clases de igualdad: absoluta y relativa.

A) IGUALDAD ABSOLUTA

Llamada también identidad o igualdad incondicional, es aquella que se verifica para cualquier valor de sus letras.

Ejemplo:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)\,x + a\,.\,b$$

B) IGUALDAD RELATIVA o ECUACIÓN

Llamada también igualdad condicional, es aquella que se verifica para algunos valores particulares atribuidos a sus letras, llamadas incognitas.

Ejemplo:

$$3x + 6 = 0$$

se verifica sólo para: $x = -2$

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE LAS IGUALDADES PARA LA TRANSFORMACIÓN DE ECUACIONES

1er. PRINCIPIO

Si a ambos miembros de una ecuación se les suma o resta un mismo valor, la ecuación no varía.

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \pm n = B \pm n$$

2do. PRINCIPIO

Si a ambos miembros de una igualdad se le multiplica o divide por un número independiente de "x", distinto de cero y distinto de infinito, la ecuación no varia.

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \,.\, n = B \,.\, n$$

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad \frac{A}{n} = \frac{B}{n}$$

$$n \neq 0,\ n \neq \infty$$

3er. PRINCIPIO

Si ambos miembros de una ecuación son elevados a una misma potencia o se les extrae la misma raíz, la ecuación que resulta parcialmente es la misma.

Sea:

$$A = B$$

Si:

$$A^n = B^n \quad ; \quad \sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{B}$$

entonces, se puede escribir:

$$A^n - B^n = 0$$

Factorizando por cocientes notables:

$$(A - B)\,(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \ldots + AB^{n-2} + B^{n-1}) = 0$$

De esta última igualdad se obtiene, igualando, los factores a cero:

$$A - B = 0 \qquad A = B$$

$$A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \ldots + AB^{n-2} + B^{n-1} = 0$$

(Ecuaciones introducida que da soluciones extrañas)

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON INCOGNITA

Son aquellas que pueden reducirse a la forma:

$$ax + b = 0$$

Solución: $x = -\dfrac{b}{a}$

SISTEMA DE ECUACIONES

Es un conjunto de dos o más ecuaciones verificadas para un mismo juego de valores de las incognitas.

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES

a) Compatibles:

Cuando el sistema tiene soluciones. A su vez, puede ser:

- Determinadas: Número de soluciones limitado.
- Indeterminadas: Muchas soluciones.

b) Incompatibles:

Cuando el sistema no tiene ninguna solución

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Son aquellas cuyas ecuaciones son de primer grado.

Ejemplo:

$$\boxed{\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}}$$

MÉTODOS PARA RESOLVER SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1) MÉTODO DE SUSTITUCIÓN: PARA DOS ECUACIONES

De una de las ecuaciones se despeja una de las incógnitas en función de la otra y se sustituye este valor en la otra ecuación, obteniéndose una ecuación con una sola incógnita.

El valor de la incógnita obtenida de esta última ecuación se reemplaza en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema y se obtiene el valor de la segunda incógnita.

Ejemplo:

$$2x + 5y = 26 \qquad (1)$$

$$3x - 4y = -7 \qquad (2)$$

De (1):

$$x = \frac{26 - 5y}{2}$$

Sustituyendo en (2):

$$3 \cdot \frac{26 - 5y}{2} - 4y = -7$$

$$78 - 15y - 8y = -14$$

$\therefore\ y = 4$

Sustituyendo en (1):

$$2x + 5 \,.\, 4 = 26$$

$\therefore\ x = 3$

2) MÉTODO DE IGUALACIÓN: PARA DOS ECUACIONES

De las dos ecuaciones se despeja una misma incógnita en función de la otra y se iguala ambas, obteniéndose una ecuación con una sola incógnita; el valor obtenido de esta última ecuación se reemplaza en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema y se obtiene el valor de la otra incógnita.

Ejemplo:

$$2x + 5y = 26 \qquad (1)$$

$$3x - 4y = -7 \qquad (2)$$

De (1):

$$x = \frac{26 - 5y}{2}$$

De (2):

$$x = \frac{-7 + 4y}{3}$$

Igualando estas últimas:

$$\frac{26 - 5y}{2} = \frac{-7 + 4y}{3}$$

$\therefore\ y = 4$

Sustituyendo en (1):

$$2x + 5 \,.\, 4 = 26$$

$\therefore\ x = 3$

3) MÉTODO DE REDUCCIÓN: PARA DOS ECUACIONES

Consiste en hacer que los coeficientes de la incógnita que se quiere eliminar en ambas ecuaciones sean iguales, para lo cual se multiplica una de las ecuaciones por el coeficiente de la misma incógnita de la otra ecuación, luego se suman o restan según convenga.

Ejemplo:

$$2x + 5y = 26 \qquad (1)$$

$$3x - 4y = -7 \qquad (2)$$

Para eliminar "x", se multiplica (1) por 3 y (2) por 2, así:

$$6x + 15y = 78 \qquad (3)$$

$$6x - 8y = -14 \qquad (4)$$

Restando (3) - (4):

$$23y = 92$$

$\therefore\ y = 4$

Sustituyendo en (1): $2x + 5 \,.\, 4 = 26$

$\therefore\ x = 3$

4) MÉTODO DE LOS DETERMINANTES: REGLA DE CRAMER

En todo sistema de ecuciones determinadas, el valor de cada incógnita se puede calcular mediante una fracción, cuyo denominador es el determinante del sistema, siendo el numerador este mismo determinante en el que se ha reemplazado la columna de los coeficientes de la incógnita por los términos independientes. Así:

$$\boxed{x = \frac{\Delta x}{\Delta S}} \qquad \boxed{y = \frac{\Delta y}{\Delta S}}$$

Ejemplo:

Resolver: $2x + 5y = 26$

$3x - 4y = -7$

ΔS = determinante del sistema:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -8 - 15 = -23$$

Δx = determinante de x:

$$\begin{vmatrix} 26 & 5 \\ -7 & -4 \end{vmatrix} = -104 - (-35) = -69$$

Δy = determinante de y:

$$\begin{vmatrix} 2 & 26 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = -14 - 78 = -92$$

$$\therefore \qquad x = \frac{\Delta x}{\Delta s} = \frac{-69}{-23} = 3$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta s} = \frac{-92}{-23} = 4$$

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO Y ECUACIONES BICUADRATICAS

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Una ecución de segundo grado o cuadrática es de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

RESOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCOGNITA

Se resuelve de dos formas:

1) FACTORIZANDO MEDIANTE EL ASPA SIMPLE

Ejemplo: Resolver la ecuación:

$$\frac{4x^2 - 3x + 5}{x^2 - 2x + 13} = 2$$

PROCEDIMIENTO:

Efectuando, ordenando e igualando a cero:

$$4x^2 - 3x + 5 = 2x^2 - 4x + 26$$

$$2x^2 + x - 21 = 0$$

Factorizando por aspa:

$$\begin{array}{ccc} 2x & & 7 \\ & \times & \\ x & & -3 \end{array}$$

$$(2x + 7)\ (x - 3) = 0$$

Igualando a cero cada factor:

Si: $2x + 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -3{,}5$

Si: $x - 3 \ = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 3$

2) APLICANDO LA FÓRMULA GENERAL

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta fórmula se recomienda aplicar cuando la factorización no es inmediata.

Ejemplo:

Resolver la ecuación: $4x^2 - 5x = 19$

PROCEDIMIENTO:

Igulando a cero:

$$4x^2 - 5x - 19 = 0$$

donde: a = 4 ; b = -5 ; c = -19

Aplicando la fórmula:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-19)}}{2(4)}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{329}}{8}$$

de donde se obtiene dos raíces:

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{329}}{8}$$

$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{329}}{8}$$

DISCUCIÓN DEL VALOR DE LAS RAÍCES

Las raíces de una ecuación de segundo grado dependen de la cantidad sub-radical, llamada "discriminante" o "invariante" y se le representa por la letra griega "delta".

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

1) Si $\Delta > 0$, se obtiene dos raíces reales y desiguales.

2) Si $\Delta = 0$, se obtiene dos raíces reales e iguales.

3) Si $\Delta < 0$, se obtiene dos raíces complejas y conjugadas.

PROPIEDADES DE LAS RAÍCES

Sea la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, con raíces:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1º SUMA DE RAÍCES

$$\boxed{x_1 + x_2 = \frac{b}{a}}$$

2º PRODUCTO DE RAÍCES

$$\boxed{x_1 + x_2 = \frac{c}{a}}$$

3º PARA UNA ECUACIÓN CÚBICA

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

con raíces:

$$x_1, x_2, x_3$$

se cumple:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -b$$

$$x_1 \,.\, x_2 + x_1 \,.\, x_3 + x_2 \,.\, x_3 = c$$

$$x_1 \,.\, x_2 \,.\, x_3 = -d$$

FORMACIÓN DE UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Si "x_1" y "x_2" son las raíces de una ecuación de segundo grado. la ecuacíon originaria se forma así:

$$\boxed{x^2 - (x_1 + x_2)\, x + (x_1 \,.\, x_2) = 0}$$

Ejemplo:

Sean $x_1 = -4$ y $x_2 = 3$, escribir la correspondiente ecuación de segundo grado.

PROCEDIMIENTO:

$$x^2 - (-4 + 3)\, x + (-4)\,(3) = 0$$

$$x^2 + x - 12 = 0$$

ECUACIONES BICUADRADAS

Son ecuaciones de 4º grado de la forma:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Se resuelve de dos maneras:

a) Factorizando e igualando a cero.

b) Haciendo $x^2 = y$, lo que transforma a la ecuación bicuadrada a una de segundo grado de la forma:

$$ay^2 + by + c = 0$$

cuyas raíces son:

$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

pero $x^2 = y$, luego $x = \pm\sqrt{y}$; resultando entonces 4 raíces:

$$x_1 = +\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$x_3 = +\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$x_4 = +\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

PROPIEDADES DE LAS RAÍCES DE UNA ECUACIÓN BICUADRADA

SUMA DE RAÍCES:

$$\boxed{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0}$$

PRODUCTO:

$$\boxed{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \frac{c}{a}}$$

PRODUCTOS BINARIOS:

$$\boxed{x_1 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_4 = \frac{b}{a}}$$

FORMACIÓN DE UNA ECUACIÓN BICUADRADA

$$\boxed{x^4 + (x_1 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_4)x^2 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 0}$$

Ejemplo:

Sean las raíces x' = ± 4 y x" = ± 2

¿Cuál es la ecuación bicuadrada)

PROCEDIMIENTO:

Sean: $x_1 = 4$ $\quad x_2 = -4$

$x_3 = 2$ $\quad x_4 = -2$

Luego aplicando la fórmula de cosntrucción:

$$x^4 + [(4)(-4) + (2)(-2)]\,x^2 + (4)(-4)(2)(-2) = 0$$

$$x^4 - 20x^2 + 64 = 0$$

ECUACIONES RECÍPROCAS

Son de la forma:

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Bx + A = 0$$

Es decir, sus coeficientes equidistantes del centro son iguales.

Reciben este nombre porque no varían cuando se cambia "x" por su recíproco "1/x".

Ejemplo:

Resolver: $6x^4 - 25x^3 + 12x^2 - 25x + 6 = 0$

PROCEDIMIENTO:

Se factoriza x^2:

$$x^2\left(6x^2 - 25x + 12 - \frac{25}{x} + \frac{6}{x^2}\right) = 0$$

$$x^2\left[6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 25\left(x + \frac{1}{x}\right) + 12\right] = 0 \quad (A)$$

hacemos:

$$x + \frac{1}{(1)} = y$$

para elevarlo al cuadrado:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2 \qquad (2)$$

Sustituyendo (1) y (2) en (A):

$$x^2[6(y^2 - 2) - 25y + 12] = 0$$

$$x^2(6y^2 - 25y) = 0$$

$$x^2y(6y - 25) = 0$$

Reponiendo el valor de x:

$$x^2\left(x + \frac{1}{x}\right)\left[6\left(x + \frac{1}{x}\right) - 25\right] = 0$$

Igualando los factores a cero, sólo el último factor arroja resultados válidos:

$$x_1 = 3,91098$$

$$x_2 = 0,25569$$

ECUACIONES BINOMIAS Y TRINOMIAS

1) BINOMIAS

Son de forma: $\boxed{Ax^n + b = 0}$

Se resuelve factorizando e igualando cada factor a cero o mediante la fórmula de Moivre.

Ejemplo:

$$8x^3 - 27 = 0$$

la cual también se puede escribir también como:

$$(2x)^3 - (3)^3 = 0$$

factorizando:

$$(2x - 3)[(2x)^2 + (2x)(3) + (3)^2] = 0$$

$$(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9) = 0$$

Si: $2x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \dfrac{3}{2}$

Si: $4x^2 + 6x + 9 = 0 \quad \Rightarrow$

$$x_2 = \frac{-3 + 3\sqrt{3}i}{4} \qquad x_3 = \frac{-3 - 3\sqrt{3}i}{4}$$

2) TRINOMIAS

Son de la forma: $\boxed{Ax^{2n} + Bx^n + C = 0}$

Se resuelve cambiando $x^n = y$, y se transforma en una ecuación de segundo grado.

Ejemplo:

Resolver: $\quad x^8 - 15x^4 - 16 = 0$

PROCEDIMIENTO:

Llamando: $x^4 = y$ (a)

Luego:

$$y^2 - 15y - 16 = 0$$

de donde:

$$y_1 = 16 \;\; ; \;\; y_2 = -1$$

Sustituyendo estos valores en (a): primero, $y = 16$; luego, $y = 1$

1) $x^4 = 16 \;\Rightarrow\; (x^4 - 16) = 0 \;\Rightarrow\; (x + 2)(x - 2)$

$(x + 2i)(x - 2i) = 0$

De donde:

$$x_1 = -2 \;\; ; \;\; x_2 = 2$$

$$x_3 = -2i \;\; ; \;\; x_4 = 2i$$

2) $x^4 = -1 \;\Rightarrow\; x = \sqrt[4]{-1} = i$

ECUACIONES QUE SE RESUELVEN MEDIANTE ARTIFICIO

Mediante el empleo de incógnitas auxiliares se llega a una ecuación de forma conocida.

Ejemplo: Resolver:

$$\sqrt{\frac{x^2 - 2x + 14}{x^2 + 4x + 2}} + \sqrt{\frac{x^2 + 4x + 2}{x^2 - 2x + 14}} = 2$$

PROCEDIMIENTO:

Obsérvese que las cantidades subradicales son inversamente iguales, luego llamado a:

$$\sqrt{\frac{x^2 - 2x + 14}{x^2 + 4x + 2}} = y$$

$$\sqrt{\frac{x^2 + 4x + 2}{x^2 + 4x + 2}} = \frac{1}{y}$$

$\therefore$ La expresión propuesta se escribe:

$$y + \frac{1}{y} = 2$$

$$y^2 - 2y + 1 = 0$$

$$(y - 1)^2 = 0$$

de donde:

$$y = 1$$

Con este valor:

$$\sqrt{\frac{x^2 - 2x + 14}{x^2 + 4x + 2}} = 1$$

$$\frac{x^2 - 2x + 14}{x^2 + 4x + 2} = 1$$

$$x^2 - 2x + 14 = x^2 + 4x + 2$$

$$6x = 12$$

$$x = 2$$

DESIGUALDADES E INECUACIONES

DESIGUALDAD

Es una relación que establece que dos cantidades tienen diferente valor. Los signos usados son:

$>$ mayor que

$<$ menor que

$\leq$ igual o mayor que

$\geq$ igual o menor que

PROPIEDADES DE LA DESIGUALDADES

1º Si ambos miembros de una desigualdad se suma o resta una misma cantidad, la desigualdad no cambia de sentido.

$$a > b \quad \Leftrightarrow \quad a \pm m > b \pm m$$

2º Si ambos miembros de una desigualdad son multiplicados o divididos por un mismo número positivo, la desigualdad no varía.

$$a > b$$

también:

$$a \,.\, m > b \,.\, m \quad \vee \quad \frac{a}{m} > \frac{b}{m} \; ; \text{ si } m > 0$$

3º Si ambos miembros de una desigualdad se multiplica o divide por un mismo número negativo, la desigualdad cambia de sentido.

$$a > b$$

$$\text{si } n < 0 \Rightarrow a \,.\, n < b \,.\, n \quad \vee \quad \frac{a}{n} < \frac{b}{n}$$

4º Si se suma miembro a miembro varias desigualdades del mismo sentido, el resultado es una desigualdad del mismo sentido.

$$\begin{array}{c} a > b \\ c > d \\ \hline a + c > b + d \end{array}$$

5º Si se multiplica o divide miembro a miembro varias desigualdades del mismo sentido, cuyos miembros son positivos, se obtiene una desigualdad del mismo sentido:

$$\begin{array}{c} a > b \\ c > d \\ \hline a \,.\, c > b \,.\, d \end{array} \quad \vee \quad \frac{a}{c} > \frac{b}{d}$$

6º Si ambos miembros de una desigualdad son elevados a una misma potencia impar, el sentido de la desigualdad no varía.

$$a > b \quad \Rightarrow \quad a^{2n+1} > b^{2n+1}$$

7º Si ambos miembros de una desigualdad se eleva a una misma potencia par, siendo los dos miembros negativos, se obtiene una desigualdad de signo contrario.

$$a > b \quad \Leftrightarrow \quad a^{2n} < b^{2n}$$

$$\Leftrightarrow \quad a < 0 \;\; y \;\; b < 0$$

8º Si ambos miembros de una desigualdad se les extrae una misma raíz de índice impar se obtiene una desigualdad del mismo sentido.

$$a > b \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[2n+1]{a} > \sqrt[2n+1]{b}$$

CLASES DE DESIGUALDADES

1) ABSOLUTA

Cuando se verifica para cualquier valor de sus letras.

Ejemplo: $(x - 3)^2 + 9 > 0$

2) RELATIVA O INECUACIÓN

Cuando se verifica sólo para valores determinados de sus letras.

Ejemplo: $5x - 9 > 11$

sólo se satisface para $x > 4$.

INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Son de la forma:

$$\boxed{ax \pm b > 0}$$

o:

$$\boxed{ax \pm b < 0}$$

SOLUCIÓN DE UNA INECUACIÓN

Es todo valor de la incógnita o conjunto de valores de las incógnitas que verifican la desigualdad.

Las soluciones se expresan en intervalos abiertos o cerrados.

INTERVALO ABIERTO

Es el conjunto de soluciones limitados por los valores a y b, sin incluir estos valores:
Se denota así:

$$\langle a, b \rangle$$

Ejemplo:

El intervalo $\langle 2, 5 \rangle$ significa que x tiene todos los valores entre 2 y 5 pero no incluye a éstos; es decir, los valores son solamente 3 y 4.

INTERVALO CERRADO

Es el conjunto de soluciones limitados por valores a y b, incluyendo a éstos.

Se representa así:

$$[a, b]$$

Ejemplo:

El intervalo [3, 8] significa que x tiene todos los valores entre 3 y 8, inclusive estos valores; es decir, los valores son 3; 4; 5; 6; 7; 8.

VALOR ABSOLUTO

Se representa así: $| x |$

y, se define:

$$| x | = \begin{cases} x \text{ si } x > 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

SISTEMA DE INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA

Para resolver este sistema se sigue los siguientes pasos:

(1) Se halla las soluciones de cada inecuación en forma separada.

(2) Se compara, para establecer las soluciones comunes a todas las inecuaciones.

(3) Se grafica, las soluciones en la recta numérica para facilitar la solución:

Ejemplo:

$$\frac{3x}{4} - 5 > 7 \qquad (1)$$

$$\frac{x}{2} + 3 > x - 9 \qquad (2)$$

PROCEDIMIENTO:

Con la (1):

$$3x - 20 > 28$$
$$3x > 48$$
$$x > 16 \qquad (3)$$

No incluye al 16

Con la (2):

$$x + 6 > 2x - 18$$
$$-x > -24$$
$$x < 24 \qquad (4)$$

No incluye 24

Solución gráfica:

INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Son de la forma:

$$\boxed{\begin{array}{c} ax^2 + bx + c > 0 \\ ax^2 + bx + c < 0 \end{array}}$$

Se presenta 3 casos:

1er. CASO .- Cuando la inecuación es:

$$ax^2 + bx + c > 0$$

Se factoriza el trinomio. Suponiendo que se pueda factorizar así: $p(x - r_1)(x - r_2) > 0$

Para que esta desigualdad se verifique, ambos factores o son positivos o son negativos, y las soluciones serán las siguientes:

(1) si son positivos:

$$x - r_1 > 0 \qquad \therefore\ x > r_1$$
$$x - r_2 > 0 \qquad \therefore\ x > r_2$$

(2) si son negativos:

$$x - r_1 < 0 \qquad \therefore\ x < r_1$$
$$x - r_2 < 0 \qquad \therefore\ x < r_2$$

Ejemplo:

Resolver: $x^2 - 7x + 12 > 0$

Procedimiento: factorizando el trinomio:

$$(x - 4)(x - 3) > 0$$

(1) si son positivos:

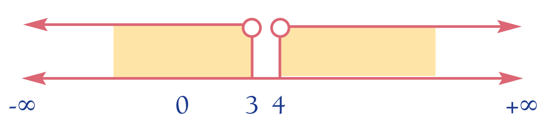
$$x - 4 > 0 \qquad \therefore\ x > 4$$
$$x - 3 > 0 \qquad \therefore\ x > 3$$

(2) si son negativos:

$$x - 4 < 0 \qquad \therefore\ x < 4$$
$$x - 3 < 0 \qquad \therefore\ x < 3$$

Conclusión:

La solución es: $x > 4 \quad \vee \quad x < 3$



2do. CASO.- La inecuación es:

$$ax^2 + bx + c < 0$$

Análogamente a la anterior, se factoriza, suponiendo que se puede factorizar así:

$$(x - r_1)(x - r_2) < 0$$

Para que esta desigualdad se verifique, un factor debe ser positivo y el otro negativo y las soluciones serán las siguientes:

Si: $x - r_1 < 0 \quad \Rightarrow \quad x < r_1$

$x - r_2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > r_2$

Si: $x - r_1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > r_1$

$x - r_2 < 0 \quad \Rightarrow \quad x < r_2$

Ejemplo:

Resolver: $x^2 - 9x + 18 < 0$

Procedimiento: Se factoriza el trinomio:

$$(x - 6)(x - 3) < 0$$

Si: $x - 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 6$

$x - 3 < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 3$

No hay solución común

Si: $x - 6 < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 6$

$x - 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 3$

Solución $3 < x < 6$

En forma de intervalo: $x \; \varepsilon \; \langle 3; 6 \rangle$

Gráficamente:

3er. CASO.- Cuando la inecuación es $ax^2 + bx + c > 0$ y tiene sus raíces complejas, solamente se verifica para ese sentido porque se trata de una desigualdad absoluta.

Ejemplo:

Resolver: $x^2 + x + 1 > 0$

PROCEDIMIENTO: Se iguala a cero:

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}\,i}{2} \qquad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}\,i}{2}$$

Las raíces son complejas. Por otra parte:

$$x^2 + 2(x)\left(\frac{1}{2}\right) + 1 > 0$$

$$x^2 + 2(x)\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} > 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

expresión que verifica la desigualdad absoluta.

PROGRESIONES

DEFINICIÓN

Son sucesiones de números o términos algebraicos en las cuales cada tres términos consecutivos forma una proporción continua, que puede ser aritmética o geométrica.

A) PROGRESIÓN ARITMÉTICA "P.A." o "POR DIFERENCIA"

Es una sucesión de números en la cual cada uno de ellos se obtiene sumándole al anterior una cantidad constante que se llama "razón".

Sea la progresión aritmética:

$$\div\; t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{n-1}, t_n$$

Se denota: t_1 = primer término

t_n = término de lugar "n"

r = razón

n = número de términos

S_n = suma de "n" términos.

Por definición:

$$t_n = t_{n-1} + r \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = t_n - t_{n-1}}$$

Una P.A. es creciente cuando la razón es positiva; es decreciente, cuando la razón es negativa.

$r > 0$: creciente

$r < 0$: decreciente

PROPIEDADES

1º Términos cualquiera:

$$\boxed{t_n = t_1 + (n - 1)\, r}$$

2º Las sumas de términos equidistantes de los extremos son iguales.

Sea la P.A.:

$$: t_1, \ldots, t_p, \ldots, t_q, \ldots, t_n$$

$$\boxed{t_1 + t_n = t_p + t_q}$$

(a) Término central:

$$\boxed{t_c = \frac{t_1 + t_n}{2}}$$

(b) Un término cualquiera es media aritmética entre el anterior y el posterior:

$$\boxed{t_2 = \frac{t_1 + t_3}{2}}$$

3º Suma de los "n" primeros términos:

$$\boxed{S_n = \frac{(t_1 + t_n)n}{2}}$$

o:

$$\boxed{S_n = \frac{[2t_1 + (n - 1)r]n}{2}}$$

INTERPOLACIÓN

Es la operación de hallar los términos de una progresión aritmética entre otros dos. Por ejemplo, entre a y b.

Razón para interpolar:

$$\boxed{r_i = \frac{b - a}{m + 1}}$$

Donde:

"a" y "b" son términos dados de una proresión aritmética.

"m" es el número de términos a colocar entre "a" y "b".

Ejemplo:

Interpolar 4 medios aritméticos entre los números 5 y 20.

Razón para interpolar:

$$r_i = \frac{b - a}{m + 1} = \frac{20 - 5}{4 + 1} = 3$$

La P.A. completa será:

$$: 5 : 8 : 11 : 14 : 17 : 20$$

PROGRESIÓN GEOMÉTRICA "P.G." o "POR COCIENTE"

Es una sucesión de números en la cual el primero es distinto de cero y cada uno de los términos siguientes se obtiene multiplicando al anterior por una cantidad constante llamada "razón".

Sea la progresión geométrica:

$$\boxed{: : t_1 : t_3 : \ldots : t_{n-1} : t_n}$$

Se denota: t_1 = primer término

$t_2 = t_1 \cdot q$

$t_3 = t_2 \cdot q$

t_n = término de lugar "n"

q = razón

n = número de términos

S_n = suma de "n" términos

P_n = producto de "n" términos

Ejemplos:

i) : : 2 : 10 : 50 : 250

Donde: $q = 5$

Es una progresión creciente porque $q > 1$.

ii) : : 16 : 8 : 4 : 2

Donde: $q = \frac{1}{2}$

Es una progresión decreciente porque $q < 1$.

PROPIEDADES

1º Término cualquiera:

$$\boxed{t_n = t_1 \cdot q^{n-1}}$$

2º El producto de los términos equidistantes de los extremos es igual al producto de los extremos:

$$: : t_1 : t_2 : \dots : t_p : \dots : t_q : \dots : t_{n-1} : t_n$$

$$\boxed{t_p \cdot t_q = t_1 \cdot t_n}$$

a) Término Central:

$$\boxed{t_{central} = \sqrt{t_1 \cdot t_n}}$$

b) En una P.G. de tres términos el segundo es media geométrica entre el primero y el tercero.

$$: : t_1 : t_2 : t_3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_2 = \sqrt{t_1 \cdot t_3}}$$

3º Producto de "n" primeros términos:

$$\boxed{P_n = \sqrt{(t_1 \cdot t_n)^n}}$$

4º Suma de "n" primeros términos:

$$\boxed{S_n = \frac{(q \cdot t_n) - t_1}{q - 1}}$$

o:

$$\boxed{S_n = t_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

5º El limite de la suma de los términos de una P.G. decreciente ilimitada es:

$$\boxed{\lim S = \frac{t_1}{1 - q}}$$

INTERPOLACIÓN

Razón para interpolar:

$$q_i = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$$

Donde:

m = número de términos para interpolar.

"a" y "b": números entre los cuales se interpola "m" términos.

Ejemplo:

Interpolar 3 términos entre $\frac{1}{16}$ y $\frac{1}{256}$

Donde:

$$b = \frac{1}{256} \quad ; \quad a = \frac{1}{16} \quad ; \quad m = 3$$

$$\Rightarrow \quad q_i = \sqrt[3+1]{\frac{1}{256} \Big/ \frac{1}{16}} = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$$

Luego, la P.G. será:

$$: : \frac{1}{16} : \frac{1}{32} : \frac{1}{64} : \frac{1}{128} : \frac{1}{256}$$

LOGARITMOS

PRINCIPALES CONCEPTOS

DEFINICIÓN

Se llama logaritmo de un número, en una base dada, positiva y distinta de la unidad, al "exponente" a que debe elevarse la base para obtener el número dado.

$$\boxed{\log_b N = x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{b^x = N} \quad \Rightarrow \quad b^{\log_b N} = N$$

SISTEMA DE LOGARITMOS

Hay muchos sistemas de logaritmos, que se diferencian según la base que se elija. Los sistemas más comunes son el Nepariano de base "e" y el vulgar, o de Briggs, de base 10.

$$e = 2{,}718281\ldots$$

PROPIEDADES DE LOGARITMOS

1° Sólo existe logaritmos de base positiva y diferente de 1.

$$b > 1$$

2° En el campo de los números reales no existe logaritmos de números negativos.

3° a) Si la base es mayor que la unidad:

$$\log_b \infty = +\infty \qquad y \qquad \log_b 0 = -\infty$$

b) Si la base es menor que la unidad:

$$\log_b \infty = -\infty \qquad y \qquad \log_b 0 = \infty$$

4° En todo sistema de logaritmos:

$$\log_b b = 1$$

5° En todo sistema de logaritmos:

$$\log_b 1 = 0$$

6° Logaritmo de un producto:

$$\log_b A \,.\, B = \log_b A + \log_b B$$

7° Logaritmo de un cociente:

$$\log_b \frac{A}{B} = \log_b A - \log_b B$$

8° Logaritmo de una potencia:

$$\log_b A^n = n \log_b A$$

9° Logaritmo de un radical:

$$\log_b \sqrt[n]{A} = \frac{\log_b A}{n}$$

10° En todo sistema de logaritmos, si se eleva a la base y al número a una potencia "n" o a una raíz "n", el resultado no varía.

$$\log_b N = \log_{b^n} N^n = \log_{\sqrt[n]{b}} \sqrt[n]{N}$$

COLOGARITMO

Cologaritmo de un número, en una base "b", es el logaritmo de la inversa del número en la misma base; o también, es igual al logaritmo del mismo número en la misma base, precedido del signo menos.

$$\text{colog}_b\, N = \log_b \left(\frac{1}{N}\right) = -\log_b N$$

ANTILOGARITMO

Antilogaritmo es el número que dio origen al logaritmo.

$$\text{Antilog}_b\, x = b^x$$

o:

$$\text{Antilog}_b \log_b N = N$$

CAMBIO DE UN SISTEMA DE LOGARITMOS A OTRO

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

Fórmula que permite conocer al logaritmo de un número en base "b", conociendo el logaritmo del número en base "a".

LOGARITMOS COMO PROGRESIONES

Sean las progresiones geométrica, de razon "q" y primer término "1"; y aritmética, de razón "r" y primer término "0", cuyos términos se corresponden:

$$\text{P.G.} \; :: 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : \ldots : q^n$$

$$\text{P.A.} \; : 0 \,.\, r \,.\, 2r \,.\, 3r \,.\, 4r \,.\, \ldots \,.\, nr$$

se tiene:

$$\log_b 1 = 0$$

$$\log_b q = r$$

$$\log_b q^2 = 2r$$

$$\log_b q^n = nr$$

BASE DEL SISTEMA DE LOGARITMOS DEFINIDO POR UNA P.G. Y UNA P.A.

De la conclución anterior:

$$\log_b q^n = nr \quad \Rightarrow \quad q^n = b^{nr}$$

$$\boxed{b = \sqrt[r]{q}}$$

La base de todo sistema de logaritmos es igual a la raíz "r" de la razón "q" de la P.G., siendo "r" la razón de la P.A. cuyos términos se correspondan.

Ejemplo:

Hallar la base del sistema de logaritmos definido por las progresiones:

$$:: \dots : \frac{1}{81} : \frac{1}{9} : 1 : 9 : 81 : \dots$$

$$: \dots . -8 . -4 . -0 . 4 . 8 . \dots$$

PROCEDIMIENTO:

En la P.G.: $q = \dfrac{1/9}{1/81} = 9$

En la P.G.: $r = -4 - (-8) = 4$

$$\Rightarrow \quad b = \sqrt[r]{q} \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt[4]{9} \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{3}$$

SISTEMA DE LOGARITMOS NEPERIANOS

También se llama logaritmos "naturales" o "hiperbólicos". Tiene como base el número trascendente" "e", definido como:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718281 \dots$$

o:

$$e = \lim_{n \to 0} (1 + n)^{\frac{1}{n}} = 2{,}718281 \dots$$

NOTACIÓN:

El logaritmo de un número "N" en base "e" se representa así:

$$\ln N$$

o:

$$\text{Ln } N$$

o:

$$\log_e N$$

SISTEMA DE LOGARITMOS DECIMALES

Se les llama también "vulgares" o de Briggs. Son logaritmos de base 10 definidos por las progresiones:

$$:: \dots : 10^{-n} : \dots : 10^{-3} : 10^{-2} : 10^{-1} : 1 : 10 : 10^2 : 10^3 : \dots : 10^n : \dots$$

$$: \dots . -n . \dots . -3 . -2 . -1 . 0 . 1 . 2 . 3 . \dots . n . \dots$$

NOTACIÓN:

El logaritmo de base 10 se representa así:

$$\log_{10} N$$

o simplemente:

$$\log N$$

Los logaritmos tienen 2 partes:

La parte entera del logaritmo se llama "característica".

La parte decimal del logaritmo se llama "mantisa".

PROPIEDADES DEL SISTEMA DE LOGARITMOS DECIMALES

1º Los logaritmos de los números mayores que 1 son positivos y los logaritmos de los números menores que 1 son negativos.

$$(\log > 1) > 0 \qquad (\log < 1) < 0$$

2º Los logaritmos de potencia de 10 son iguales al exponente de dicha potencia.

$$\log 10^n = n$$

3º Los logaritmos de los números correspondidos entre dos potencias consecutivas de 10 son decimales.

Ejemplo:

$$\log 1\,000 = \log 10^3 = 3$$

$$\log 100 = \log 10^2 = 2$$

$$\log 545 = 2{,}736397$$

4º La "característica del logaritmo decimal de un número mayor que 1 es positivo e indica el número de cifras enteras más 1, que tiene la parte entera del número.

Ejemplos:

i) log 5 = 0 . ...; 0 + 1 = cifra entera

ii) log 238 = 2 . ... ; 2 + 1 = 3 cifras enteras

iii) log 48,64 = 1 . ... ; 1 + 1 = 2 cifras enteras

5º La característica del logaritmo decimal de un número menor que la unidad es negativa e igual al número de ceros que preceden a la primera cifra significativa, inclusive el cero de los enteros.

Ejemplos:

i) $\log 0{,}0038 = \overline{3}\,.\,\ldots$

ii) $\log 0{,}516 = \overline{1}\,.\,\ldots$

6º Si se multipica o divide un número por la unidad seguida de ceros, no altera la mantisa de su logaritmo pero la característica aumenta o disminuye respectivamente en tantas unidades como ceros acompañan a la unidad.

Ejemplo:

$\log 0{,}00361 = \overline{3}\,.\,\ldots$

$\log 0{,}361 = \overline{1}\,.\,\ldots$

TRANSFORMAR UN LOGARITMO TOTALMENTE POSITIVO A OTRO PARCIALMENTE NEGATIVO (A) Y VICEVERSA (B)

El siguiente ejemplo indica el procedimiento para (A):

$$\log \frac{1}{75} = \text{colog } 75 = -\log 75$$

$$= -1{,}875061 = -(1 + 0{,}875061)$$

$$= -1 - 0{,}875061 + 1 - 1$$

$$= (-1 - 1) + (1 - 0{,}875061)$$

$$= -2 + 0{,}124939$$

finalmente:

$$\log \frac{1}{75} = \text{colog } 75 = \overline{2},\ 124939$$

Ejemplo: para el procedimiento inverso (B):

$$\log 0{,}071 = \overline{2}{,}851258$$

$$\log 0{,}071 = -2 + 0{,}851258 + 1 - 1$$

$$\log 0{,}071 = (-2 + 1) - (1 - 0{,}851258)$$

$$\log o{,}071 = -1 - 0{,}148742$$

$$\log 0{,}071 = -1{,}148742$$

CONVERSIÓN DE LOGARITMOS DECIMALES A NEPERIANOS

$$\boxed{\text{In N} = 2{,}3026 \log \text{N}}$$

Ejemplo:

Hallar logaritmo neperiano de 1000.

PROCEDIMIENTO:

In 1 000 = 2,3026 log 1 000

= 2,3026 log 103

= 2,3026 . 3

In 1 000 = 6,9078

CONVERSIÓN DE LOGARITMOS NEPERIANOS A DECIMALES

$$\boxed{\log \text{N} = 0{,}4343 \text{ In N}}$$

Ejemplo:

Hallar el logaritmo decimal de 16, si:

In 4 = 1,38629

PROCEDIMIENTO:

$\log 16 = 0{,}4343 \text{ In } 16 = 0{,}4343 \text{ In } 4^2$

$= 0{,}4343 \,.\, 2 \text{ In } 4$

$= 0{,}4343 \,.\, 2 \,.\, 1{,}38629$

$\log 16 = 1{,}2041$

INTERÉS COMPUESTO Y ANUALIDADES

EL INTERÉS COMPUESTO

Es un mecanismo mediante el cual las ganancias se van sumando al capital, generalmente cada año, para formar parte del capital. produciendo nuevos intereses.

$$M = C\,(1 + r)^t$$

Donde:

M = Monto = C + 1 = Capital + Interes

C = Capital inicial impuesto.

$r = \dfrac{R}{100}$ = interés producido por 1 unidad monetaria en 1 año.

R = Interés producido por 100 u.m. en 1 año.

t = Tiempo impuesto al capital, en años.

INTERÉS COMPUESTO:

$$I = C\,[(1 + r)^t - 1]$$

Se denomina ANUALIDAD a la cantidad fija que se entrega o impone todos los años para formar un capital (anualidad de capitalización) o para amortizar una deuda (anualidad de amortización).

ANUALIDAD DE CAPITALIZACIÓN (A_c)

Es la cantidad fija que se impone al principio de cada año al "r" por uno de interés compuesto para formar un capital "C" en un tiempo "t".

$$A_c = \frac{C\,.\,r}{(1 + r)^t - 1}$$

ANULADIDAD DE AMORTIZACIÓN (A_a)

Es la cantidad fija que se impone al final de cada año al "r" por uno de interés compuesto para amortizar una deuda "C" y los intereses que ocasiona, a interés compuesto, en un tiempo "t".

$$A_a = \frac{C\,.\,r\,(1 + r)^t}{(1 + r)^t - 1}$$

GEOMETRÍA

DEFINICIÓN

Es la parte de la Matemática Elemental que trata de las propiedades y medidas de la extensión. La Geometría parte de ciertos conceptos primitivos dados intuitivamente, tales como: punto, recta y plano. Se divide en GEOMETRÍA PLANA Y GEOMETRÍA DEL ESPACIO.

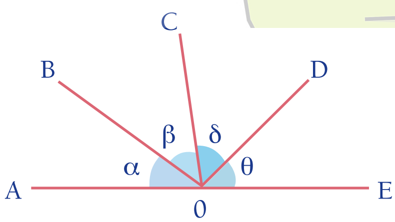
GEOMETRÍA PLANA

ÁNGULOS

TEOREMAS BÁSICOS

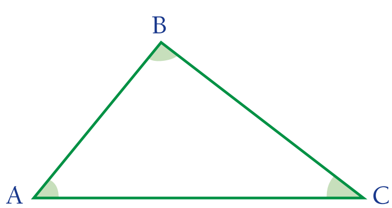
1) La suma de los ángulos consecutivos formados alrededor de un punto y a un mismo lado de una recta es 180°.

Punto O: $\boxed{\alpha + \beta + \delta + \theta = 180°}$



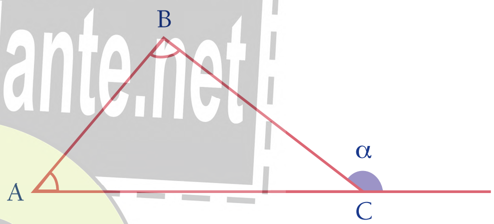
2) En todo triángulo, la suma de los ángulos internos es igual a 180°.

$\Delta\ \hat{A}\hat{B}\hat{C}$: $\boxed{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°}$



3) En un triángulo cualquiera, el ángulo exterior es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes con él.

Δ ABC: $\boxed{\alpha = \hat{A} + \hat{B}}$

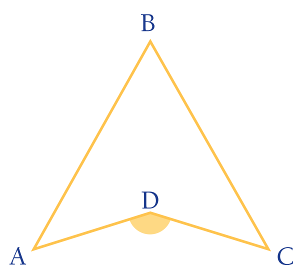


TEOREMAS AUXILIARES

TEOREMA 1.-

En todo cuadrilátero cóncavo, el ángulo exterior convexo, es igual a la suma de los ángulos interiores convexos:

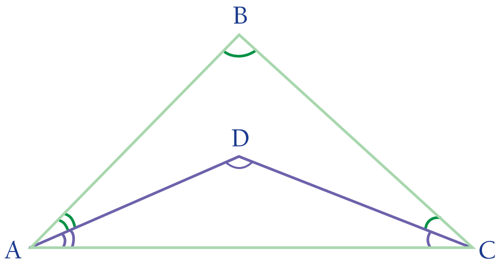
Δ ABCD: $\boxed{A\hat{D}C = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C}}$



TEOREMA 2.-

El ángulo formado por dos bisectrices interiores de un triángulo, es igual a noventa grados más la mitad del tercer ángulo:

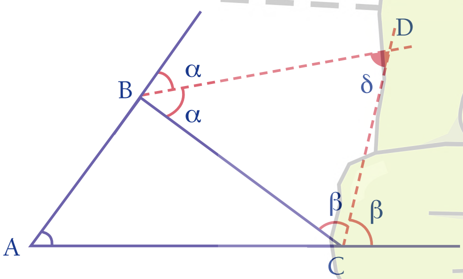
Δ ABC: $\boxed{A\hat{D}C = 90° + \dfrac{\hat{B}}{2}}$



TEOREMA 3.-

El ángulo formado por dos bisectrices exteriores de un triángulo es igual a noventa grados, menos la mitad del tercer ángulo.

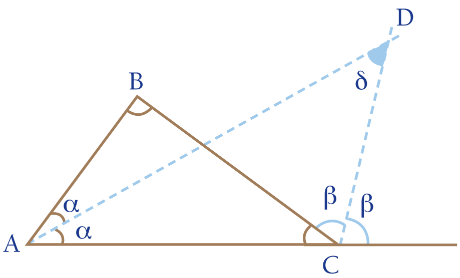
$\boxed{\delta = 90° - \dfrac{\hat{A}}{2}}$



TEOREMA 4.-

El ángulo formado por una bisectriz interior y una bisectriz exterior de un triángulo es igual a la mitad del tercer ángulo.

$\boxed{\delta = \dfrac{\hat{B}}{2}}$



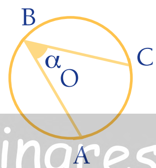
VALOR DE LOS ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

Sean los ángulos "α":

ÁNGULO CENTRAL

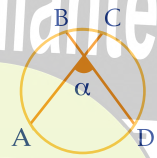
$\alpha = \overset{\frown}{AC}$

ÁNGULO INSCRITO



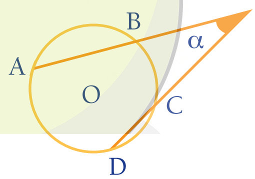
$\alpha = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}$

ÁNGULO INTERIOR



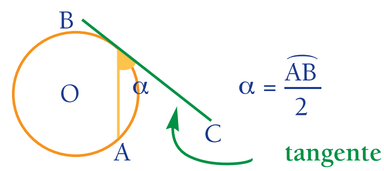
$\alpha = \dfrac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC}}{2}$

ÁNGULO EXTERIOR



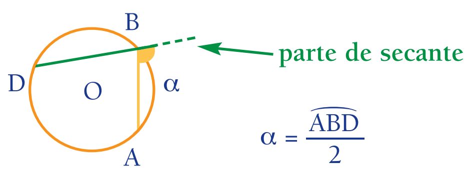
$\alpha = \dfrac{\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{BC}}{2}$

ÁNGULO SEMI-INSCRITO



$\alpha = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$

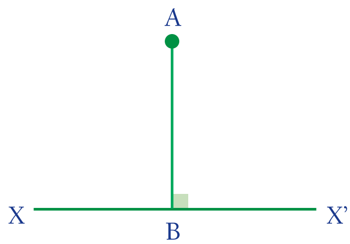
ÁNGULO EXINSCRITO



$\alpha = \dfrac{\overset{\frown}{ABD}}{2}$

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

"Es la longitud de la perpendicular trazada desde el punto a la recta".



AB: distancia de "A" a XX´

TRIÁNGULOS

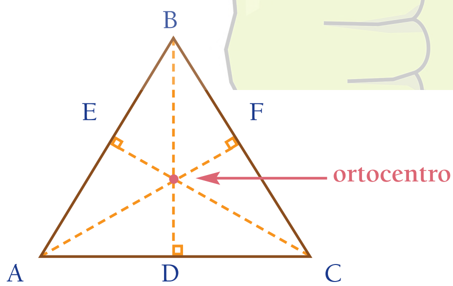
LÍNEAS PRINCIPALES DEL TRIÁNGULO

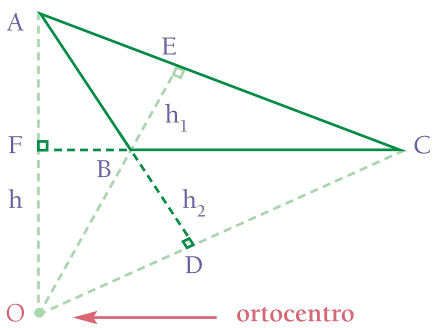
Son cuatro las líneas principales: Altura, Mediana, Mediatriz y Bisectriz.

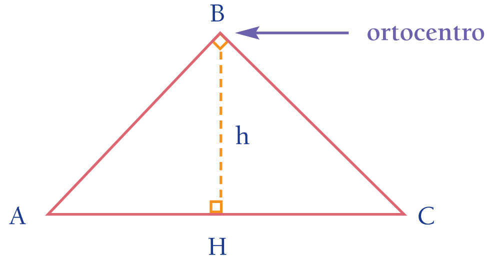
1) ALTURA

Es la distancia de un vértice al lado opuesto o a su prolongación. Las ALTURAS se cortan en un punto llamado ORTOCENTRO.

Si el triángulo es acutángulo, el ortocentro es interior; si es obtusángulo es exterior; pero si es rectángulo, es el punto de intersección de los catetos.

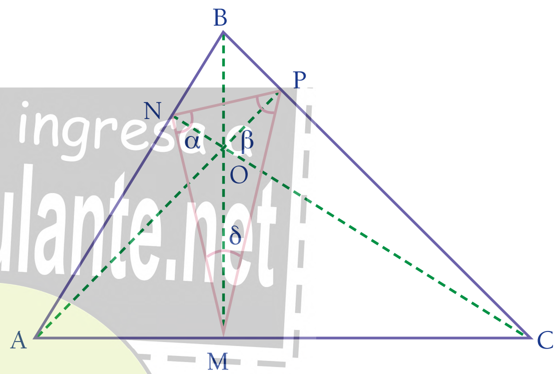






TRIÁNGULO ÓRTICO O PEDAL

Es el triángulo cuyos vértices son los pies de las alturas de un triángulo dado.



α , β y δ : ángulos del triángulo órtico.

"O" es el incentro del triángulo órtico.

Δ MNP: órtico o pedal

Donde se cumple:

$$\boxed{\alpha = 180° - 2C}$$

$$\boxed{\beta = 180° - 2A}$$

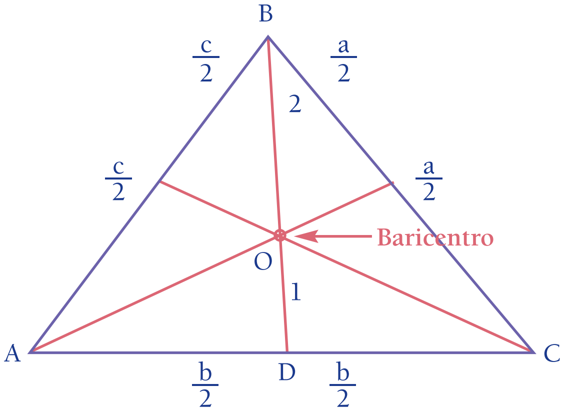
$$\boxed{\delta = 180° - 2B}$$

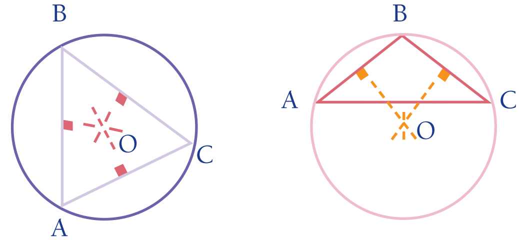
NOTA.-

En el triángulo rectángulo no se puede formar el triángulo órtico.

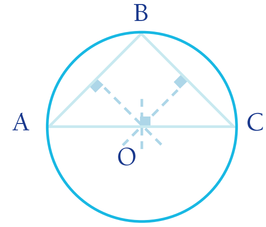
2)MEDIANA

Es el segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.





O: CIRCUNCENTROS

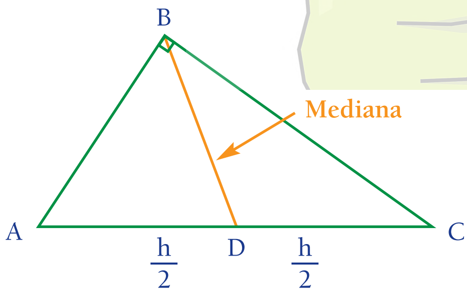


Las MEDIANAS se intersectan en un punto llamado BARICENTRO o CENTRO DE GRAVEDAD del triángulo, este punto tiene la propiedad de dividir a cada una de las medianas en la relación de dos es a uno. Por consiguiente, se cumple que:

$\boxed{\frac{OB}{OD} = \frac{2}{1}}$ $\boxed{OB = \frac{2}{3}BD}$ $\boxed{OD = \frac{1}{3}BD}$

TEOREMA.- En todo triángulo rectángulo, la mediana relativa a la hipotenusa es igual a la mitad de esa hipotenusa.

$$DB = \frac{AC}{2} = \frac{h}{2}$$



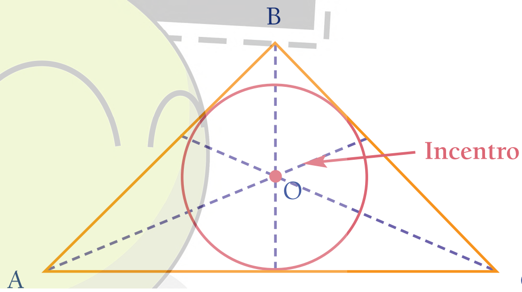
3) MEDIATRIZ

Es la perpendicular trazada desde el punto medio del lado de un triángulo. Las MEDIATRICES se cortan en un punto llamado CIRCUNCENTRO por ser el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Cuando el triángulo es acutángulo, el CIRCUNCENTRO es interior, si es obtusángulo es exterior, pero si es rectángulo, es el punto medio de la hipotenusa.

4) BISECTRIZ

Es la recta que divide a un ángulo en dos ángulos parciales iguales. Las BISECTRICES de un triángulo se cortan en un punto "O" llamado INCENTRO por ser el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.



EXCENTRO.- Es el punto "O" de intersección de una bisectriz interior con dos bisectrices exteriores relativas a los otros dos ángulos de un triángulo.

El excentro es el centro de la circunferencia exinscrita al triángulo.