NOTA

SOBRE LA SITUACIÓN DE ALGUNOS PUNTOS.

LA RECTA DE EULER.

1.- **EL CIRCUNCENTRO** equidista de los vértices del triángulo.

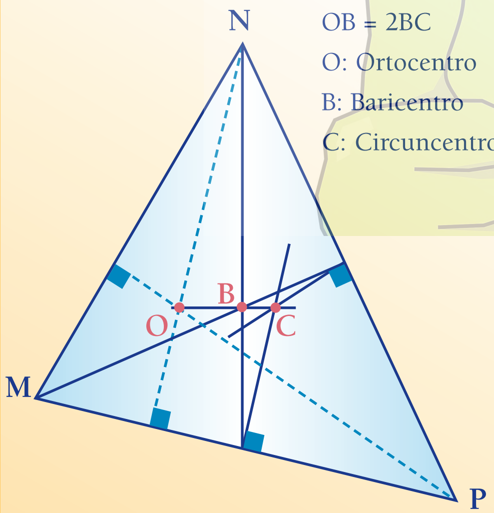
2.- **EL INCENTRO** equidista de los lados del triángulo.

3.- **El EXCENTRO** equidista de los lados del triángulo.

RECTA DE EULER.-

En todo triángulo, excepto en el equilátero, el “ortocentro”, el “baricentro” y el “circuncentro” están situados en línea recta (recta de Euler) y la distancia del ortocentro al baricentro es el doble de la distancia del baricentro al circuncentro.

OBC: recta de Euler
OB = 2BC
O: Ortocentro
B: Baricentro
C: Circuncentro



IGUALDAD DE TRIÁNGULOS

Para determinar la igualdad de dos triángulos, bastará establecer la igualdad de tres elementos, a condición de incluir en ellos, por lo menos un lado. Si esta última cláusula no se cumple, se llegará sólo a la semejanza de triángulos.

1er. Caso.- Dos triángulos son iguales cuando tienen dos lados respectivamente iguales y el ángulo comprendido entre éstos es igual.

2do. Caso.- Dos triángulos son iguales cuando tienen un lado igual y los ángulos adyacentes a estos, respectivamente iguales.

3er. Caso.- Dos triángulos son iguales cuando tienen sus tres lados respectivamente iguales.

TEOREMAS DERIVADOS DE LA IGUALDAD DE TRIÁNGULOS

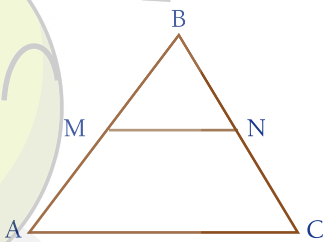
En virtud de la igualdad de triángulos, se demuestra los siguientes teoremas:

TEOREMA 1.-

Si por el punto medio del lado de un triángulo, se traza una paralela a otro lado, dicha paralela pasará por el punto medio del tercer lado y su longitud será igual a la mitad del lado al que es paralelo.

Si M = punto medio de AB y

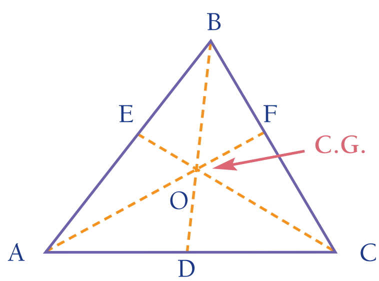
MN // AC $\Rightarrow$ N = punto medio de BC



$$\boxed{MN = \frac{AC}{2}}$$

TEOREMA 2.-

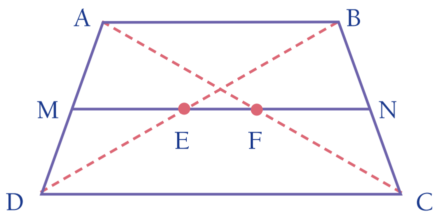
El “baricentro” o “Centro de Gravedad” de un triángulo divide a cada una de las medianas en la relación dos es a uno.



$$\Delta\ ABC: \boxed{\frac{OA}{OF} = \frac{OB}{OD} = \frac{OC}{OE} = \frac{2}{1}}$$

TEOREMA 3.-

En cualquier trapecio, la mediana es igual a la semisuma de las bases; y el segmento que une los puntos medios de las diagonales es igual a la semidiferencia de las bases.



$$\boxed{MN = \frac{DC + AB}{2}}$$

$$\boxed{EF = \frac{DC - AB}{2}}$$

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus ángulos respectivamente iguales, y sus elementos homólogos son proporcionales.

Se llama elementos homólogos a a quellos que se oponen a ángulos iguales, comparando ambos triángulos.

Los casos generales de semejanza de triángulos son:

1er. Caso.- Cuando tienen sus 3 ángulos iguales.

2do. Caso.- Cuando tienen un ángulo igual, comprendido entre lados proporcionales.

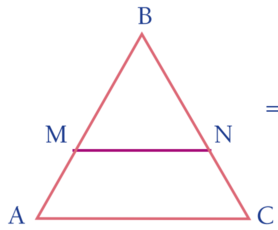
3er. Caso.- Cuando tienen sus lados respectivamente proporcionales.

TEOREMAS DERIVADOS DE LA SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

TEOREMA DE THALES

Toda recta, paralela al lado de un triángulo y que corta a los otros dos lados, determina un triángulo parcial, semejante al total y recíprocamente.

Si: MN // AC



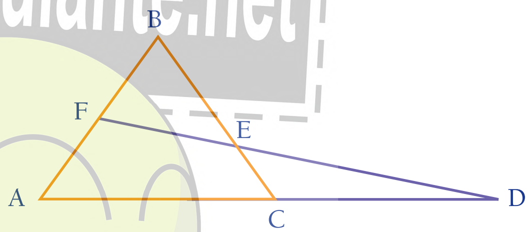
$\Rightarrow\ \Delta\ ABC \sim \Delta\ MBN$

Luego:

$$\boxed{\frac{AB}{BM} = \frac{BC}{BN} = \frac{AC}{MN}}$$

TEOREMA DE MENELAO

Toda recta que corta a los tres lados de un triángulo determina en estos, seis segmentos; siendo el producto de tres de ellos no consecutivos igual al producto de los otros tres.

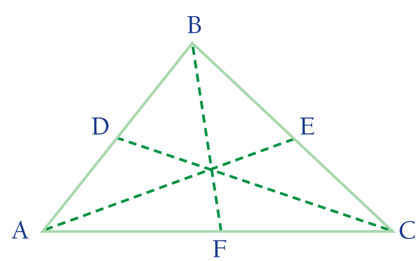


$$\Delta\ ABC: \boxed{AF\ .\ BE\ .\ CD = BF\ .\ CE\ .\ AD}$$

FD: recta que corta a los tres lados.

TEOREMA DE CEVA

Las rectas que pasan por los vértices de un triángulo y son concurrentes, determinan en los lados de éste, seis segmentos; siendo el producto de tres de ellos no consecutivos igual al producto de los otros tres.



$$\Delta\ ABC: \boxed{AD.\ BE\ .\ CF = BD\ .\ CE\ .\ AF}$$

RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

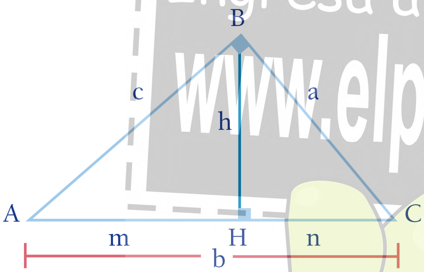
En cualquier triángulo rectángulo, se cumple las siguientes propiedades:

1° La altura relativa a la hipotenusa, es media proporcional entre los segmentos que determina sobre ésta.

2° Cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ésta.

3° La suma de los cuadrados de los catetos, es igual al cuadrado de la hipotenusa; es el teorema de Pitágoras.

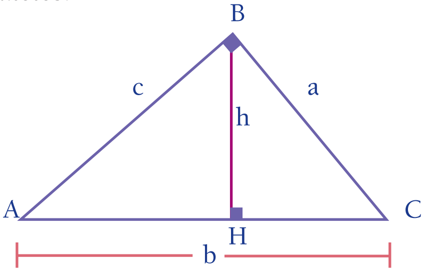
4° El producto de los catetos es igual al producto de la hipotenusa por la altura relativa a ésta.



1°	$h^2 = mn$
2°	$a^2 = bn$
	$c^2 = bm$
3°	$a^2 + c^2 = b^2$
4°	$ac = bh$

TEOREMA.-

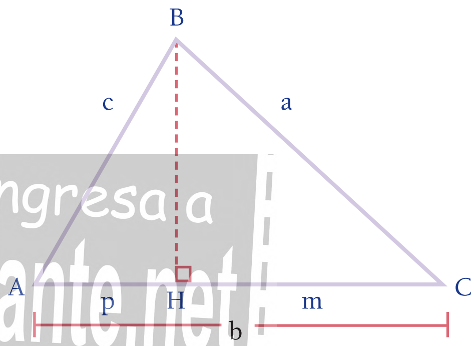
En todo triángulo rectángulo, la inversa del cuadrado de la altura relativa a la hipotenusa es igual a la suma de las inversas de los cuadrados de los catetos.



$$\boxed{\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}}$$

RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO

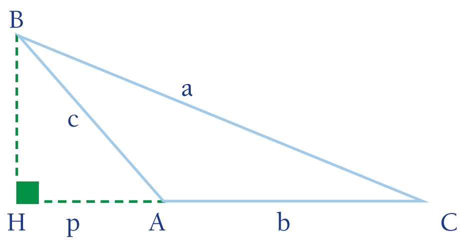
1er caso.- En todo triángulo acutángulo, el cuadrado del lado que se opone a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble producto de uno de éstos por la proyecciòn del otro sobre el que se ha tomado.



Δ ABC: $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bp}$

Δ ABC: $\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2bm}$

2do. Caso.- En todo triángulo obtusángulo, el cuadrado del lado que se opone al ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos más el doble producto de unos de éstos por la proyección del otro sobre el que se ha tomado.



Δ ABC: $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 + 2bp}$

TEOREMA.-

Conocidos los tres lados de un triángulo: a, b y c siendo "a" el lado mayor, el triángulo será rectángulo, acutángulo u obtusángulo, respectivamente, si:

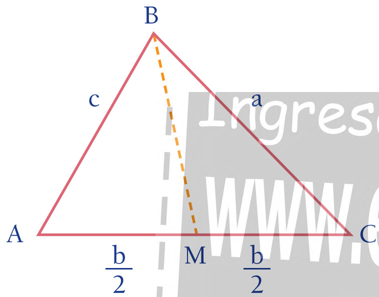
1) $a^2 = b^2 + c^2$ Δ rectángulo

2) $a^2 < b^2 + c^2$ Δ acutángulo

3) $a^2 > b^2 + c^2$ Δ obtusángulo

RELACIÓN DE LADOS CON LA MEDIANA

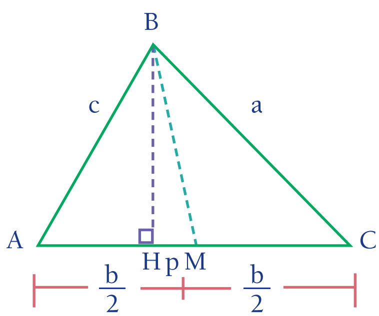
En un triángulo cualquiera, la suma de los cuadrados de los lados que concurren en el vértice de donde parte la mediana, es igual al doble del cuadrado de dicha mediana, más la mitad del cuadrado del tercer lado.



Δ ABC: $a^2 + c^2 = 2\overline{BM}^2 + \dfrac{b^2}{2}$

TEOREMA AUXILIAR.-

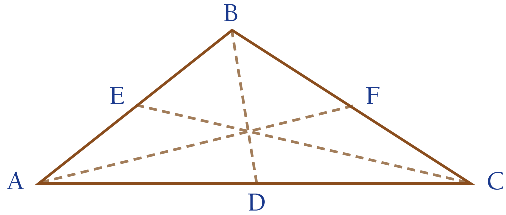
En un triángulo, la diferencia de los cuadrados de los lados que concurren en el vértice de donde parte la mediana, es igual al doble producto del tercer lado por la proyección de la mediana sobre éste.



Δ ABC: $a^2 - c^2 = 2bp$

TEOREMA.-

En todo triángulo, la suma de los cuadrados de las tres medianas es igual a tres cuartos de la suma de los cuadrados de los lados.



Δ ABC:

$$AF^2 + BD^2 + CE^2 = \frac{3}{4}\left(AB^2 + BC^2 + AC^2\right)$$

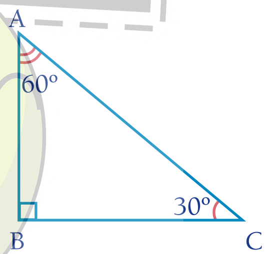
RELACIÓN DE LADOS CON ÁNGULOS : 30º, 60º, 45º

1.- En todo triángulo rectángulo de ángulos 30º y 60º, se cumple:

a.- El cateto que se opone a 30º es igual a la mitad de la hipotenusa.

b.- El cateto que se opone a 60º es igual a la mitad de la hipotenusa por la raíz cuadrada de 3.

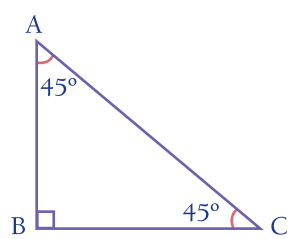
Δ ABC: 30º - 60º - 90º



a) $AB = \dfrac{AC}{2}$

b) $BC = \dfrac{AC\sqrt{3}}{2}$

2.- En todo triángulo rectángulo isósceles, cada cateto es igual a la mitad de la hipotenusa por la raíz cuadrada de 2.

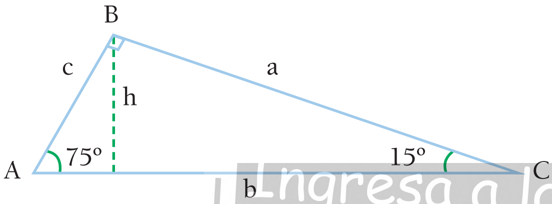


Δ ABC: 45º - 45º - 90º

$$\boxed{AB = BC = \frac{AC\sqrt{2}}{2}}$$

3.- En un triángulo rectángulo de ángulos 15º y 75º, la altura relativa a la hipotenusa es la cuarta parte de dicha hipotenusa.

Δ ABC: 15º - 75º - 90º

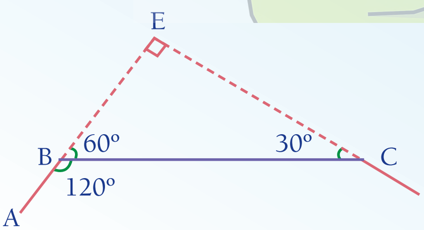


$$\boxed{h = \frac{b}{4}}$$

NOTA.-

Cuando se tenga ángulos de 120º, 135º o 150º, es preferible trabajar con el suplemento: 60º, 45º o 30º; de modo que éste sea el ángulo de un triángulo rectángulo convenientemente construido, al cual se le aplica los teoremas vistos anteriormente, así:

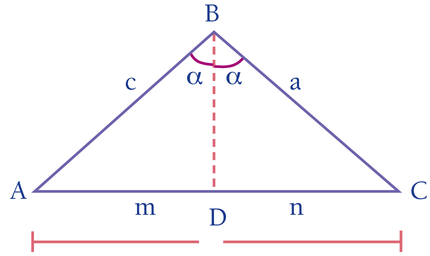
Δ BEC: 30º - 60º - 90º



RELACIÓN DE LADOS CON SEGMENTOS DETERMINADOS POR LA BISECTRIZ

1er. Caso: BISECTRIZ INTERIOR

En un triángulo cualquiera, la bisectriz interior determina en el lado opuesto, segmentos proporcionales a los lados que forman el vértice de donde parte dicha bisectriz.

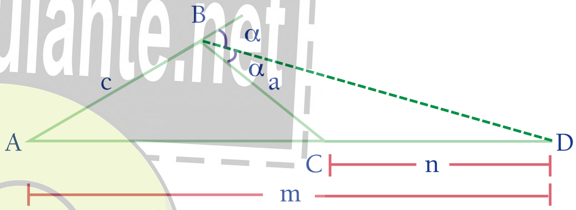


Δ ABC: $\boxed{\frac{c}{a} = \frac{m}{n}}$

2do. Caso: BISECTRIZ EXTERIOR

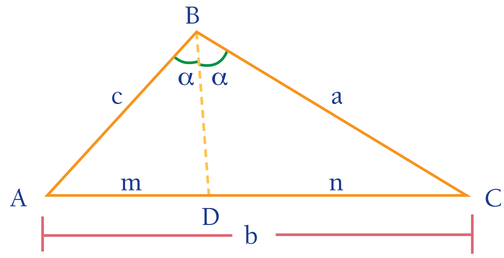
La bisectriz exterior de un triángulo, determina en el lado opuesto, segementos proporcionales a los lados que forman el vértice de donde parte esa bisectriz.

Δ ABC: $\boxed{\frac{c}{a} = \frac{m}{n}}$



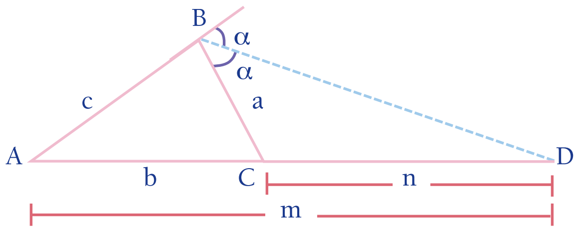
RELACIÓN DE LADOS CON BISECTRIZ

1er. Caso: En un triángulo cualquiera, la bisectriz interior elevada al cuadrado, es igual al producto de los lados que forman el vértice de donde parte dicha bisectriz, menos el producto de los segmentos determinados por esa bisectriz en el tercer lado.



Δ ABC: $\boxed{\overline{BD}^2 = a\,.\,c - m\,.\,n}$

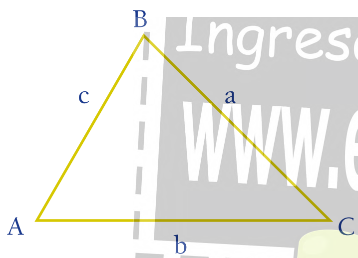
2do. Caso.- En todo triángulo, la bisectriz exterior elevada al cuadrado, es igual al producto de los segmentos determinados por dicha bisectriz en el lado opuesto menos el producto de los lados que forman el vértice de donde parte esa bisectriz.



Δ ABC: $\overline{BD}^2 = m \cdot n - a \cdot c$

RELACIÓN DE LADOS EN DESIGUALDAD

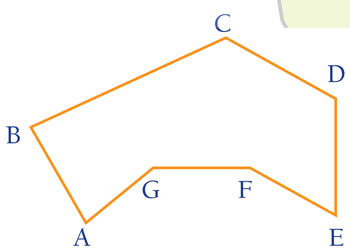
En un triángulo, debe cumplirse que un lado es menor que la suma de los otros dos lados pero mayor que su diferencia.



Δ ABC: $b - c < a < b + c$

TEOREMA.-

Toda línea poligonal envuelta es menor que la línea poligonal envolvente que tiene los mismos extremos que aquella.



$AG + GF + FE < AB + BC + CD + DE$

Envuelta < Envolvente

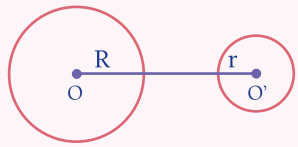
CIRCUNFERENCIA

Circunferencia es una curva plana, cerrada, cuyos puntos son todos equidistantes de otro que se llama centro, situado en el mismo plano. Más formalmente, es el lugar Geométrico de todos los puntos que equidistan de otro punto llamado centro.

POSICIONES RELATIVAS DE DOS CIRCUNFERENCIAS

Las posiciones relativas de dos circunferencias son: Exteriores, Interiores, Tangentes (exteriores e interiores), Secantes y Concéntricas.

EXTERIORES

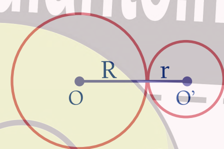


$OO' > R + r$

INTERIORES

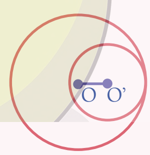
$OO' < R - r$

TANGENTES EXTERIORES



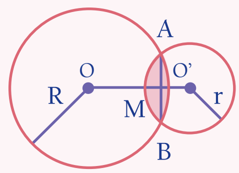
$OO' = R + r$

TANGENTES INTERIORES



$OO' = R - r$

SECANTES



$R - r < OO' < R + r$

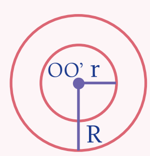
Además:

AB = cuerda común

$AB \perp OO'$

AM = BM

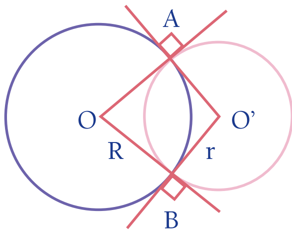
CONCENTRICAS



OO' = cero

CIRCUNFERENCIAS ORTOGONALES

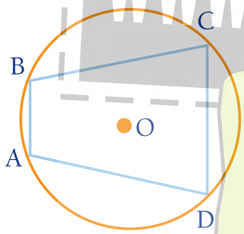
Son dos circunferencias secantes cuyos radios son perpendiculares entre sí en los puntos de intersección.



R ∧ r

CUADRILÁTERO INSCRITO A UNA CIRCUNFERENCIA

Es todo cuadrilátero cuyos vértices pertenecen a la circunferencia y se cumple que los ángulos opuestos son suplementarios.



▭ ABCD: $\hat{B} + \hat{D} = 180^{\circ}$

$\hat{A} + \hat{C} = 180^{\circ}$

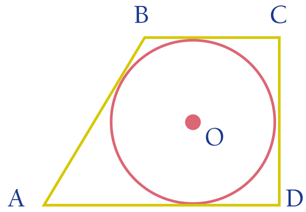
CUADRILÁTERO INSCRIPTIBLE A UNA CIRCUNFERENCIA

Es aquel cuadrilátero cuyos vértices pertenecen a una circunferencia, si y sólo si su ángulos opuestos son suplementarios.

Por ejemplo: El cuadrado y el rectángulo.

CUADRILÁTERO CIRCUNSCRITO A UNA CIRCUNFERENCIA

Es todo cuadrilátero cuyos lados son tangentes a la circunferencia. En estos cuadriláteros se cumple que la suma de los lados opuestos son iguales.



▭ ABCD: AB + CD = BC + AD

CUADRILÁTERO CIRCUNSCRIPTIBLE A UNA CIRCUNFERENCIA

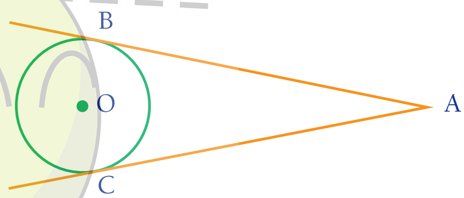
Es el cuadrilátero cuyos lados pueden ser tangentes a la circunferencia, sólo será posible si la suma de los lados opuestos son iguales.

Por ejemplo: El cuadrado y el rombo son circunscriptibles.

PROPIEDADES DE LAS TANGENTES

TEOREMA 1.-

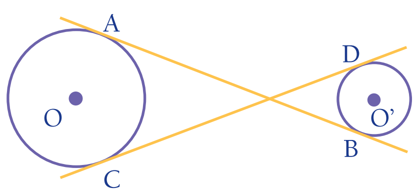
Las tangentes trazadas desde un punto exterior a una circunferencia, son iguales.



AB = AC

TEOREMA 2.-

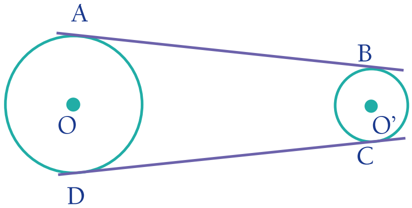
Las tangentes comunes interiores a dos circunferencias, son iguales.



AB = CD

TEOREMA 3.-

Las tangentes comunes exteriores a dos circunferencias, son iguales.

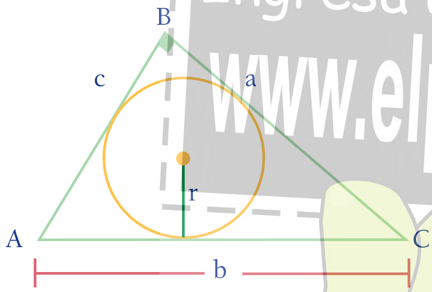


AB = CD

TEOREMAS FUNDAMENTALES EN LA CIRCUNFERENCIA

TEOREMA 1.-

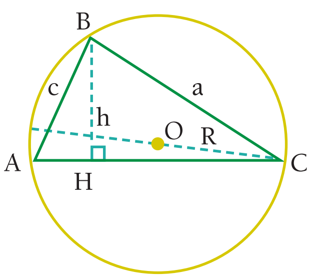
En todo triángulo rectángulo, la suma de los catetos es igual a la suma de la hipotenusa más el diámetro de la circunferencia inscrita al triángulo.



Δ ABC: $a + c = b + 2r$

TEOREMA 2.-

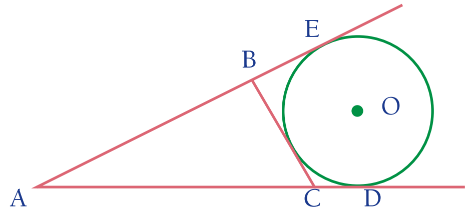
En todo triángulo, el producto de dos lados es igual al producto de la altura relativa al tercero por el diámetro de la circunferencia circunscrita.



Δ ABC: $a \,.\, c = h \,.\, 2R$

TEOREMA 3.-

El triángulo exinscrito a una circunferencia, tiene por perímetro el doble de una de las tangentes de los lados prolongados, excepto el lado tangente.



Δ ABC: $2p = 2AE = 2AD$

o: $p = AE = AD$

donde: 2p = perímetro

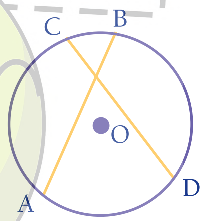
p = semiperímetro

LÍNEAS PROPORCIONALES EN EL CÍRCULO

Se presentan tres propiedades o teoremas:

TEOREMA 1.-

Si dos cuerdas se cortan dentro de un círculo, el producto de los dos segmentos de una, es igual al producto de los dos segmentos de la otra.

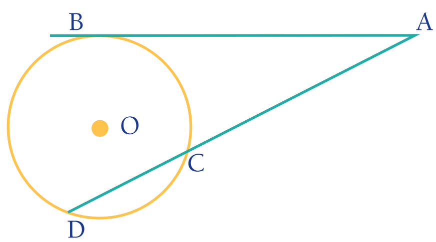


Punto E: $AE \,.\, EB = CE \,.\, DE$

TEOREMA 2.-

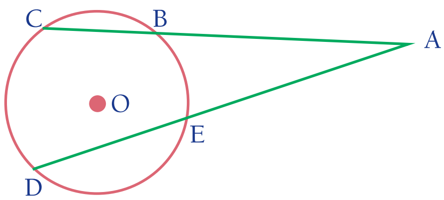
Si desde un punto exterior a un círculo se traza a él una secante y una tangente, la tangente es media proporcional entre la secante y su parte externa.

Punto A: $AB^2 = AD \,.\, AC$



TEOREMA 3.-

Si desde un punto exterior a un círculo, se traza dos o más secantes, el producto de una de ellas y su parte externa es igual al producto de la otra y su parte externa.

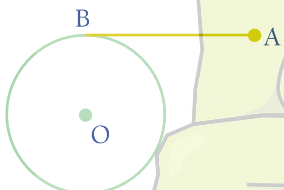


Punto A: $AC \cdot AB = AD \cdot AE$

POTENCIA DE UN PUNTO

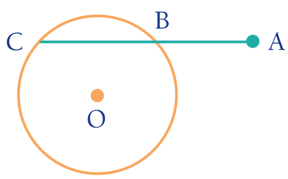
Se define potencia de un punto, con relación a una circunferencia de centro O, a cualquiera de las siguientes afirmaciones:

1.- Al cuadrado de la tangente trazada desde ese punto.



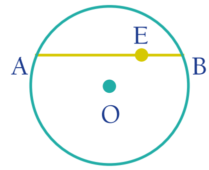
Potencia $A_{(0)} = \overline{AB}^2$

2.- El producto de la secante (trazada desde ese punto) y su parte externa.



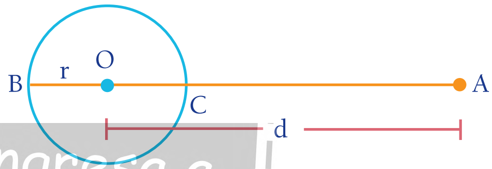
Potencia $A_{(0)} = AC \cdot AB$

3.- Al producto de los segmentos en que dicho punto divide a una cuerda.



Potencia $E_{(0)} = AE \cdot BE$

La forma general de potencia se expresa en función de la distancia "d" del punto al centro y del radio "r" de la circunferencia.



Potencia $A_{(0)} = d^2 - r^2$

OBSERVACIONES SOBRE LA POTENCIA DE UN PUNTO

1.- Cuando el punto es exterior, su potencia es positiva, ya que: $d > r$.

2.- Cuando el punto es interno, su potencia es negativa, ya que: $d < r$.

3.- Cuando el punto está en la circunferencia, su potencia es nula, porque: $d = r$.

LUGAR GEOMÉTRICO

Lugar geométrico es un sistema de puntos o conjuntos de puntos que tienen una misma propiedad.

La mediatriz de un segmento de recta, la bisectriz de un ángulo convexo, la circunferencia, etc., son casos de lugares geométricos.

EJE RADICAL

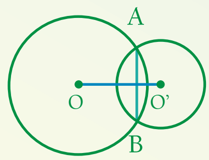
Es el lugar geométrico de los puntos que tiene igual potencia con relación a dos circunferencias dadas.

El eje radical es una línea recta perpendicular a la línea que une los centros.

POSICIONES DEL EJE RADICAL

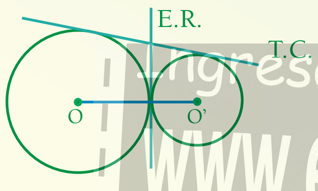
Cuando las circunferencias son:

SECANTES



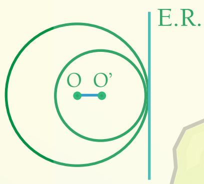
E.R. cuerda común AB

TANGENTES EXTERIORMENTE



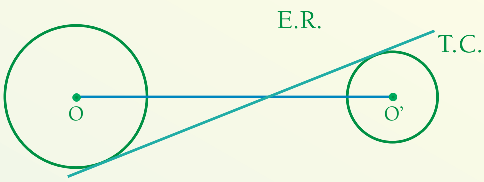
E.R. tangente común

TANGENTES INTERIORMENTE

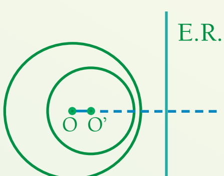


E.R. tangente común

EXTERIORES



INTERIORES



Nótese que si las circunferencias son concéntricas, no hay eje radical.

PROPIEDADES DEL EJE RADICAL

1º El eje radical de dos circunferencias exteriores está más cerca al centro de la menor que al de la mayor.

2º El eje radical de dos circunferencias es el Lugar Geométrico de los puntos, desde el cual se puede trazar a las dos circunferencias, tangentes iguales.

3º El eje radical de dos circunferencias pasa por los puntos medios de las tangentes comunes.

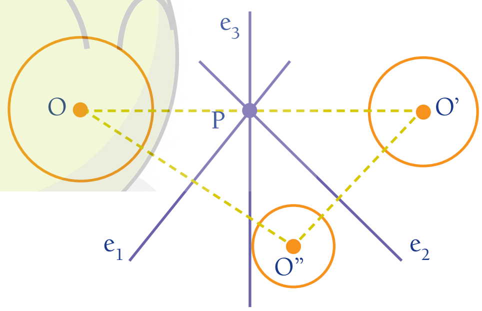
OBSERVACIÓN:

En las propiedades 2º y 3º, hay que considerar las posiciones de las dos circunferencias, a las cuales se les puede trazar tangentes comunes inferiores o exteriores.

CENTRO RADICAL

Es el punto de intersección de los ejes radicales de tres circunferencias, tomadas de dos en dos. Los centros de las circunferencias no están en línea recta.

P = Centro Radical



El **centro radical**, es el punto desde el cual se puede trazar a las tres circunferencias, tangentes iguales entre sí, y es el centro de circunferencia ortogonal a los tres.

No se cumple si las tres son secantes, entre otras posibilidades.

MEDIA Y EXTREMA RAZÓN DE UN SEGMENTO O SECCIÓN AÚREA

Un segmento está dividido en media y extrema razón, por un punto, si la parte mayor es media proporcional entre la parte menor y el segmento total. Es decir:

$$\boxed{AB^2 = AC \cdot BC}$$

A la parte AB, se le llama sección áurea o segmento áureo, cuyo valor es:

$$\boxed{AB = \frac{AC\left(\sqrt{5} - 1\right)}{2}}$$

El número áureo es:

$$\boxed{n = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad AB = AC \cdot n$$

DIVISIÓN ARMÓNICA DE UN SEGMENTO

Se dice que un segmento "AB" está dividido armónicamente por dos puntos (C y D) tal que uno "C" le pertenece y otro "D" está en su prolongación, si se cumple que:

$$\boxed{\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{BD}}$$

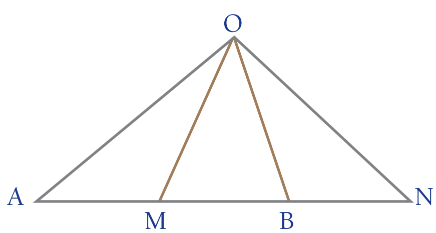
A los puntos: A, B, C y D se les llama: "cuaterna armónica"; siendo C y D los conjugados armónicos de A y B.

HAZ ARMÓNICO

Es todo sistema de cuatro rectas concurrentes que pasan por una cuaterna armónica.

OA, OM, OB, ON: rayos del haz.

OM y ON: rayos conjugados respecto de OA y OB, recíprocamente.

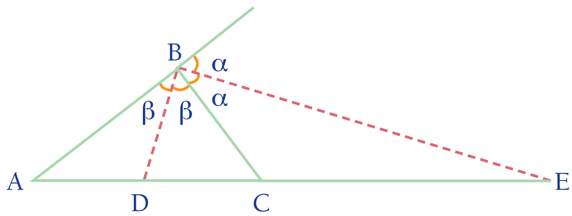


TEOREMA.-

Los pies de las bisectrices interior y exterior de un triángulo son los conjugados armónicos de los vértices del lado respectivo.

Se cumple:

$$\boxed{\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{CE}}$$



POLÍGONOS

DEFINICIÓN Y CONCEPTOS

Son las figuras geométricas formadas por un conjunto de segmentos de recta uno a continuación de otro, en un mismo plano, llamados lados que cierran una "región" o área. El punto común de dos segmentos consecutivos se llama *vértice*.

Los polígonos pueden ser: regulares e irregulares.

Son regulares aquellos que tienen sus ángulos iguales, lados iguales y son siempre inscriptibles y circuncriptibles a una circunferencia.

Los irregulares, no cumplen estas condiciones.

ELEMENTOS DE LOS POLÍGONOS REGULARES

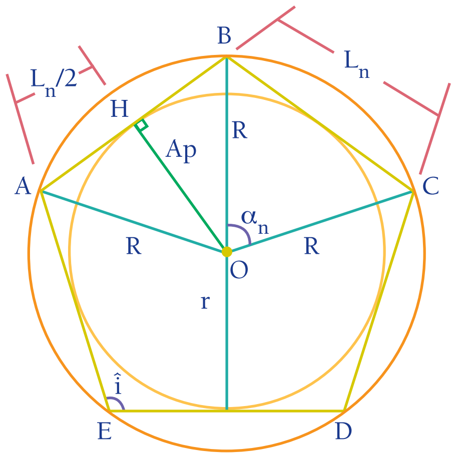
$$\boxed{\alpha_n = \frac{360^\circ}{n}}$$

$$\boxed{S_i = 180^\circ\,(n - 2)}$$

$$\boxed{\hat{i} = \frac{180^\circ\,(n - 2)}{n}}$$

$$\boxed{N_D = \frac{n\,(n - 2)}{2}}$$

$$\boxed{S_E = 360^\circ}$$



O = centro de la circunferencias inscrita y circunscrita.

α_n = ángulo central

n = número de lados

S_i = suma de ángulos internos

i = ángulos interior

L_n = longitud del lado del polígono

N_D = número total de diagonales

R = radio de la circunferencia circunscrita

r = radio de la circunferencia inscrita = Ap

S_E = suma de ángulos exteriores

Ap = apotema = r

n-2 = número de triángulos que se pueden trazar desde un solo vértice.

n-3 = número de diagonales que se puede trazar desde un solo vértice.

CÁLCULO DE LOS ELEMENTOS DE LOS POLÍGONOS IRREGULARES

$$\boxed{S_i = 180^\circ\ (n - 2)}$$

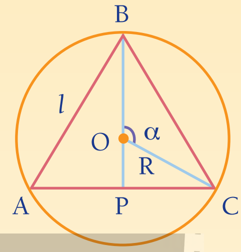
$$\boxed{S_E = 360^\circ}$$

$$\boxed{N_D = \frac{n\ (n - 3)}{2}}$$

VALOR DE LOS ELEMENTOS DE LOS POLÍGONOS REGULARES

Angulos centrales, lados, apotemas y áreas de los polígonos regulares en función del radio de la circunferencia circunscrita.

TRIÁNGULO EQUILATERO:



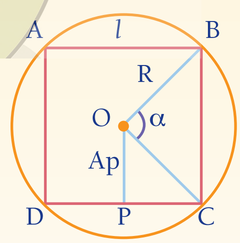
$$\alpha = 120^\circ$$

$$l = R\sqrt{3}$$

$$Ap = \frac{R}{2}$$

$$S = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$$

CUADRADO:



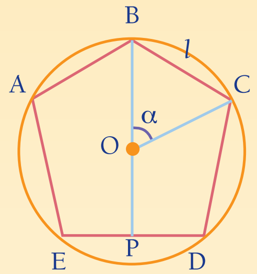
$$\alpha = 90^\circ$$

$$l = R\sqrt{2}$$

$$Ap = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

$$S = 2R^2$$

PENTÁGONO:



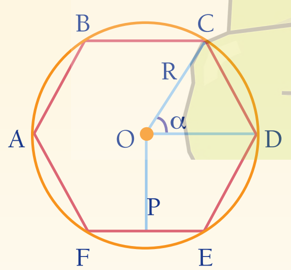
$$\alpha = 72^\circ$$

$$l = \frac{R\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2}$$

$$Ap = \frac{R\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$S = \frac{5R^2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{8}$$

EXÁGONO



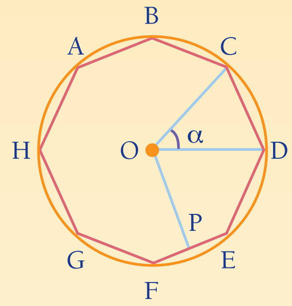
$$\alpha = 60^\circ$$

$$l = R$$

$$Ap = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$$S = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$$

OCTÁGONO



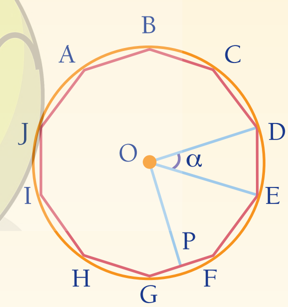
$$\alpha = 45^\circ$$

$$l = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$Ap = \frac{R\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$S = 2R^2\sqrt{2}$$

DECÁGONO



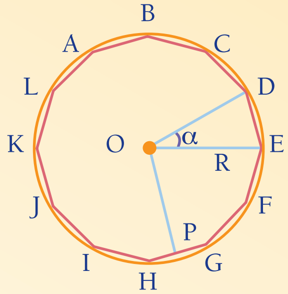
$$\alpha = 36^\circ$$

$$l = \frac{R\left(\sqrt{5} - 1\right)}{2}$$

$$Ap = \frac{R\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$S = \frac{5R^2\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

DODECÁGONO:



$\alpha = 30°$

$l = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

$Ap = \dfrac{R\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$

$S = 3R^2$

LEYENDA GENERAL:

α = ángulo central

l = lado

Ap = Apotema = OP

S = superficie = área

NOTAS.-

1.- El lado del decágono regular, es la sección áurea de un radio que se encuentra dividido en media y extrema razón.

$$l_{10} = \frac{R\left(\sqrt{5} - 1\right)}{2}$$

2.- El lado del pentágono regular es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos son el lado del exágono regular y el lado del decágono regular.

$$\Delta\ ABC: l_5 = \sqrt{l_6^2 + l_{10}^2}$$

3.- El área de un polígono regular se puede calcular así:

$$S_n = p_n \cdot Ap_n$$

Donde: "p_n", el semiperímetro y "Ap_n" la apotema, del polígono de "n" lados.

CONCLUSIONES SOBRE LOS POLÍGONOS REGULARES

1º El ángulo exterior de un polígono regular y el ángulo central son iguales.

2º El ángulo interior de un polígono regular y el ángulo central son suplementarios.

3º De dos o más polígonos regulares, el que tiene más lados, posee menor ángulo central.

4º Un triángulo isósceles puede ser el elemento de un polígono regular, siempre que su ángulo desigual sea un divisor de 360º; siendo el cociente obtenido el número de lados del polígono.

En ese triángulo se cumplirá:

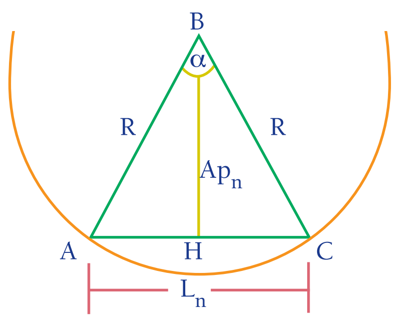
a.- El ángulo desigual es el ángulo central del polígono.

b.- El vértice del ángulo desigual es el centro de la circunferencia circunscrita al polígono.

c.- Los lados iguales son los radios de la circunferencia circunscrita al polígono.

d.- La altura relativa a la base es el apotema del polígono.

e.- La base o lado desigual es el lado del polígono regular.



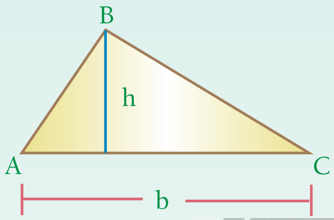
ÁREA DE LAS REGIONES PLANAS

REGIÓN

Es un espacio plano llamado "área" limitado por segmentos rectilíneos llamados "lados".

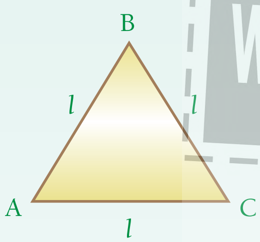
ÁREA DE TRIÁNGULOS

FÓRMULA BÁSICA



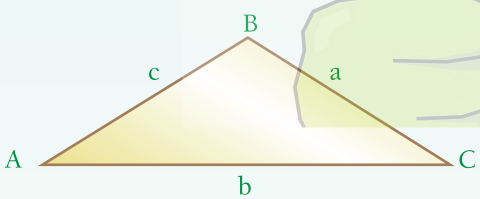
$$S = \frac{b \cdot h}{2}$$

TRIÁNGULO EQUILÁTERO:



$$S = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

EN FUNCIÓN DEL SEMIPERÍMETRO "p":

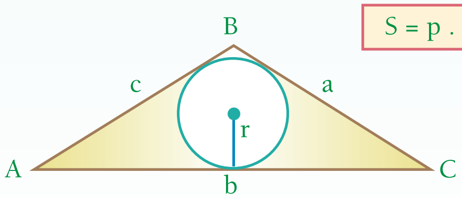


$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

Donde: $p = \dfrac{a + b + c}{2}$

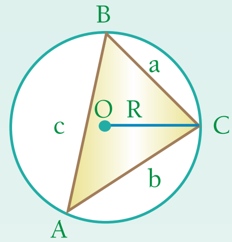
EN FUNCIÓN DE RADIO INSCRITO "r":

$$S = p \cdot r$$



Donde: $p = \dfrac{a + b + c}{2}$

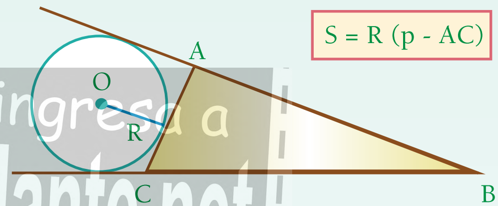
EN FUNCIÓN DEL RADIO CIRCUNSCRITO "R":



$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

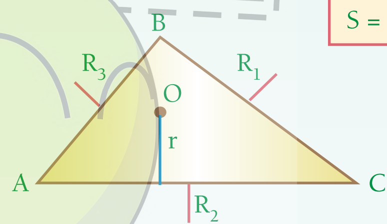
EN FUNCIÓN DEL RADIO EXINSCRITO "R"

$$S = R\,(p - AC)$$



EN FUNCIÓN DE LOS RADIOS INSCRITO "r" Y EX-INSCRITOS

$$S = \sqrt{rR_1R_2R_3}$$



LEYENDA:

S = superficie o área

B = base (un lado)

H = altura

L = lado

P = semiperímetro

2p = perímetro

R = radio del círculo circunscrito

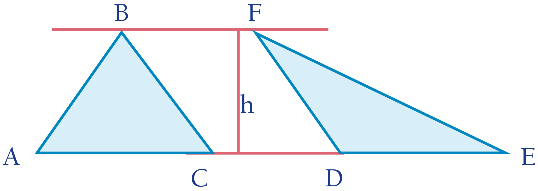
r = radio del círculo inscrito

a, b, c = lados del triángulo

RELACIÓN DE ÁREAS DE TRIÁNGULOS

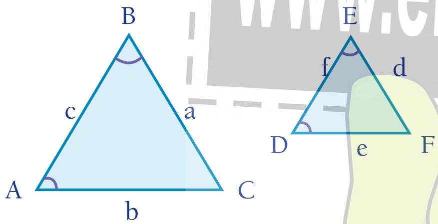
1.- Si dos triángulos tienen igual altura, sus áreas son entre sí como las bases respectivas.

$$\frac{S\,\Delta\ ABC}{S\,\Delta\ DEF} = \frac{AC}{DE}$$



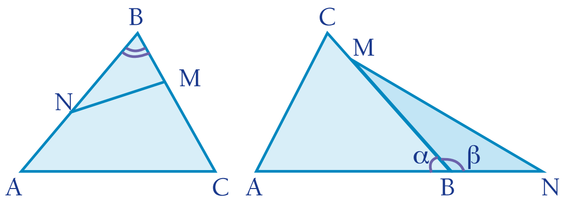
2.- Si dos triángulos son semejantes, sus áreas son entre sí como los cuadrados de sus elementos homólogos.

$$\frac{S\,\Delta\ ABC}{S\,\Delta\ DEF} = \frac{a^2}{d^2} = \frac{b^2}{e^2} = \frac{c^2}{f^2}$$



3.- Si dos triángulos tienen un ángulo igual (común) o suplementario, sus áreas son entre sí como los productos de los lados que forman ese ángulo igual (común) o suplementario.

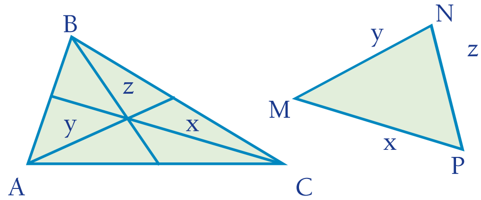
$$\frac{S\,\Delta\ ABC}{S\,\Delta\ MBN} = \frac{AB\ .\ AC}{BM\ .\ BN}$$



TEOREMA.-

El área del triángulo cuyos lados son medianas de un triángulo dado, es igual a los tres cuartos de área del triángulo dado.

$$S\,\Delta\ MNP = \frac{3}{4}\ S\,\Delta\ ABC$$

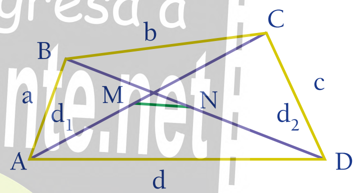


PROPIEDADES DE LOS CUADRILÁTEROS

1º TEOREMA DE EULER

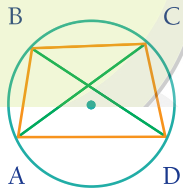
En todo cuadrilátero, la suma de los cuadrados de sus lados es igual a la suma de los cuadrados de sus diagonales, más cuatro veces el cuadrado del segmento que une los puntos medios de las diagonales.

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = d_1^2 + d_2^2 + 4MN^2$$



2º TEOREMA DE PTOLOMEO (1)

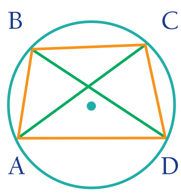
En todo ccuadrilátero inscrito o inscriptible a una circunferencia, la suma de los productos de los lados opuestos es igual al producto de las diagonales.



$$AB\ .\ CD + BC\ .\ AD = AC\ .\ BD$$

3º TEOREMA DE PTOLOMEO (2)

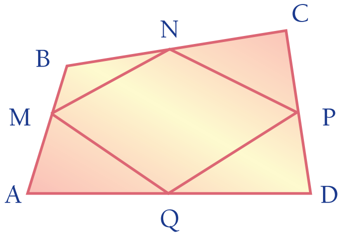
En todo cuadrilátero inscrito o inscriptible a una circunferencia, las diagonales son entre sí, como la suma de los productos de los lados que concurren en los vértices que forman las respectivas diagonales.



$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB\ .\ AD + BC\ .\ CD}{AB\ .\ BC + AD\ .\ CD}$$

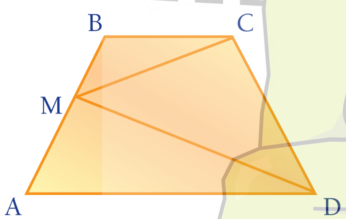
4° En todo cuadrilátero, si se une consecutivamente los puntos medios de los lados del cuadrilátero, se formará siempre un paralelogramo cuya área es la mitad del área del cuadrilátero.

$$S_{\square MNPQ} = \frac{S_{\square ABCD}}{2}$$



5° En todo trapecio, si se une el punto de un lado no paralelo, con los vértices del otro lado no paralelo, se formará un triángulo cuya área es la mitad del área del trapecio.

$$S_{\Delta CMD} = \frac{S_{\square ABCD}}{2}$$



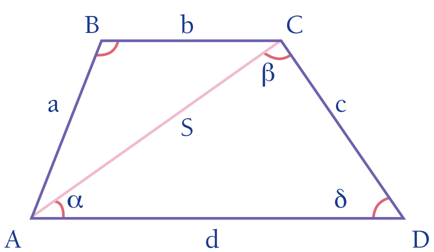
SEMEJANZA DE POLÍGONOS

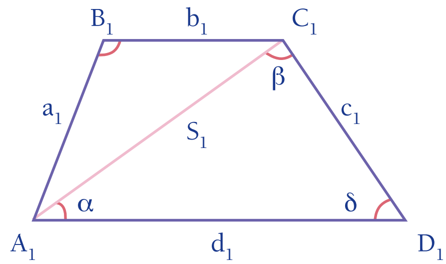
Para que dos polígonos del mismo número de lados sean semejantes, debe cumplirse dos condiciones:

1.- Que tengan sus ángulos respectivamente iguales.

2.- Que se les pueda descomponer en el mismo número de triángulos semejantes.

Satisfechas estas condiciones de semejanza, las relaciones métricas de dos polígonos semejantes son:





(1) Los elementos homólogos son proporcionales.

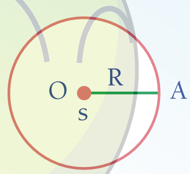
$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{d}{d_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

(2) Las áreas son entre sí, como los cuadrados de los elementos homólogos.

$$\frac{S}{S_1} = \frac{a^2}{a_1^2} = \frac{b^2}{b_1^2} = \frac{c^2}{c_1^2} = \frac{d^2}{d_1^2}$$

ÁREAS DE LAS REGIONES CURVAS

CÍRCULO:

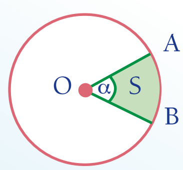


$$S = \pi R^2$$

$$S = \frac{\pi D^2}{4}$$

D = diámetro

SECTOR CIRCULAR:

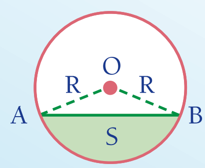


$$S_{secAOB} = \frac{\alpha \pi R^2}{360°}$$

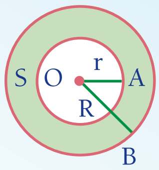
α = ángulo central

SEGMENTO CIRCULAR:

$$S_{seg} = S_{secAOB} - S_{\Delta AOB}$$



CORONA CIRCULAR:



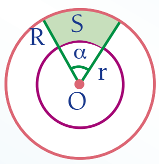
$$S = \pi\,(R^2 - r^2)$$

$$S = \frac{\pi\,(D^2 - d^2)}{4}$$

D = diámetro exterior

d = diámetro interior

TRAPECIO CIRCULAR



$$S = \frac{\pi R^2\alpha}{360^o} - \frac{\pi r^2\alpha}{360^o}$$

$$S = \frac{\pi\alpha(R^2 - r^2)}{360^o}$$

LEYENDA:

- S = superficie o área
- S Δ = superficie o área del triángulo
- $S_{\square}$ = superficie o área del cuadrilátero
- R = radio exterior
- r = radio interior
- D = diámetro exterior
- d = diámetro interior
- S_{sec} = superficie o área del sector circular
- S_{seg} = superficie o área del segmento circular

GEOMETRÍA DEL ESPACIO

TEOREMAS FUNDAMENTALES

ÁNGULO TRIEDRO

O simplemente TRIEDRO, es un ángulo poliedro de tres caras. Sus elementos son:

* Tres caras o planos:

  ASB = a ; BSC = b ; ASC = c

* Tres diedros o aristas:

  SA ; SB: SC (o simplemente A; B; C)

* Un vértice:

El punto “S” donde concurren las tres caras o las tres aristas.

TEOREMA 1.-

En todo triedro, una cara debe ser mayor que la diferencia de las otras dos, pero menor que la suma de las mismas.

$$b - c < a < b + c$$

TEOREMA 2.-

En todo triedro, la suma de sus caras es mayor que cero grados, pero menor que cuatro rectos

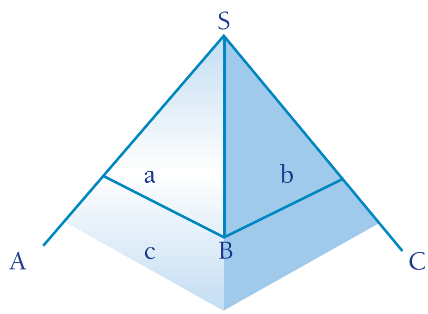
$$0 < a + b + c < 2\pi$$

Este teorema es aplicable también para todos los ángulos poliedros distintos al triedro.

TEOREMA 3.-

En todo driedro, la suma de los ángulos diedros es mayor que dos rectos, pero menor que seis rectos.

$$\pi < A + B + C < 3\pi$$



POLIEDROS

Poliedro es un sólido limitado por planos, que al cortarse y limitarse determinan sus caras, sus aristas y sus vértices.

TEOREMA DE EULER

TEOREMA 1.-

En todo poliedro, el número de aristas más dos, es igual al número de vértices más el número de caras.

$$\# A + 2 = \# V + \# C$$

TEOREMA 2.-

En todo poliedro, la suma de los ángulos formados en los vértices por las aristas, es igual a tantas veces cuatro rectos, como número de vértices tiene el poliedro menos dos.

$$S = 2\pi\,(\# V - 2)$$

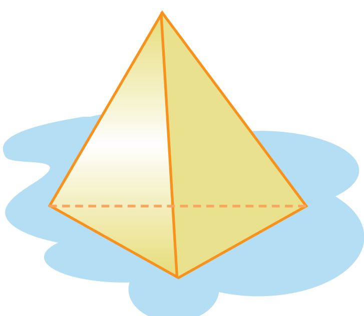
POLIEDRO REGULAR

Es aquel cuyas caras son polígonos regulares iguales y cuyos ángulos poliedros son todos iguales.

Los poliedros regulares son sólo cinco: Tetraedro regular, Exaedro regular o cubo, Octaedro regular, Dodecaedro regular e Icosaedro regular.

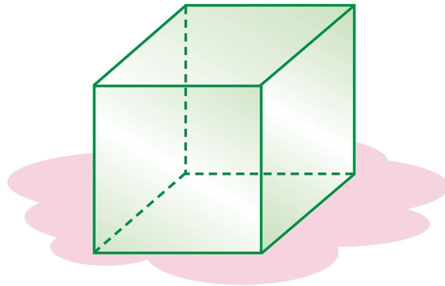
1) TETRAEDRO REGULAR

Es el poliedro regular formado por **cuatro caras** iguales que son triángulos equiláteros unidos por los vértices de tres en tres.



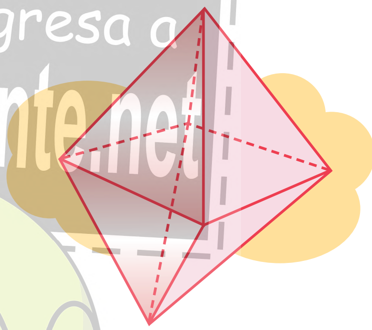
2) EXAEDRO REGULAR O CUBO

Poliedro regular formado por **seis caras** iguales, que son cuadradas, unidas por los vértices de tres en tres.



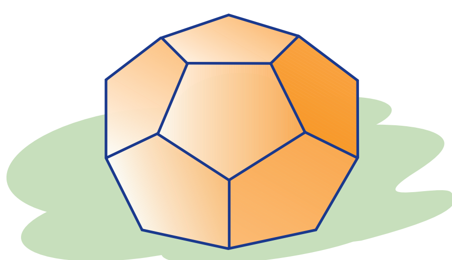
3) OCTAEDRO REGULAR

Es el poliedro regular formado por **ocho caras** iguales que son triángulos equiláteros unidos por los vértices de cuatro en cuatro.



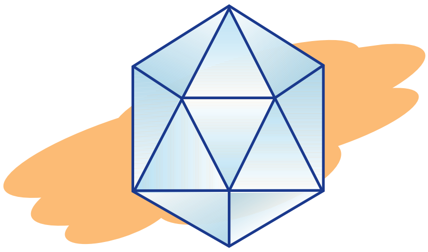
4) DODECAEDRO REGULAR

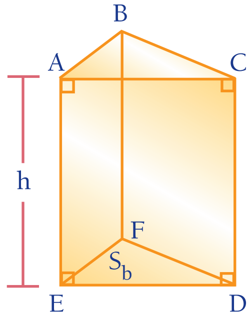
Es el poliedro regular formado por **doce caras** iguales que son pentágonos regulares, unidos por los vértices de tres en tres.



5) ICOSAEDRO REGULAR

Es el poliedro regular formado por **veinte caras** iguales que son triángulos equiláteros unidos por los vértices de cinco en cinco.





PRISMA

Es un poliedro, dos de cuyas caras son paralelas llamadas bases (iguales) y cuyas otras caras son paralelogramos (caras laterales).

ALTURA DE UN PRISMA

Es la longitud de la perpendicular común a las bases.

PRISMA RECTO

Es aquel cuyas aristales laterales son perpendiculares a las bases.

PRISMA OBLICUO

Es aquel cuyas aristas son oblicuas a las bases.

PRISMA REGULAR

Un prisma es regular cuando **tienen polígonos regulares** por **bases** y sus **aristas laterales son perpendiculares** a las bases.

SECCIÓN RECTA (SR)

Es la sección determinada por un plano perpendicular a las aristas laterales.

CÁLCULO DE LOS ELEMENTOS DE LOS POLIEDROS

PRISMA RECTO

$S_L = 2p \,.\, h$

$S_T = S_L + 2S_b$

$V = S_b \,.\, h$

$V = S_b$. arista lateral

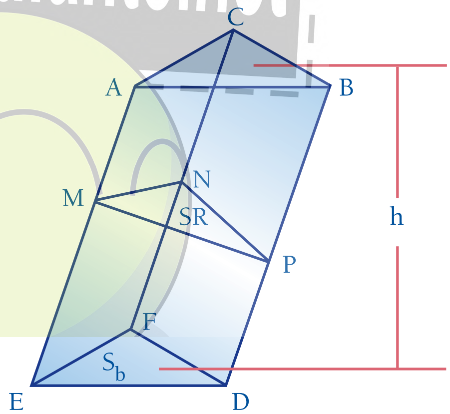
PRISMA OBLICUO

$S_L = 2p_{SR}$. arista lateral

$S_T = Sp_L + 25_b$

$V = S_b \,.\, h$

$V = S_{SR}$. arista lateral



PARALELEPIPEDO RECTÁNGULAR

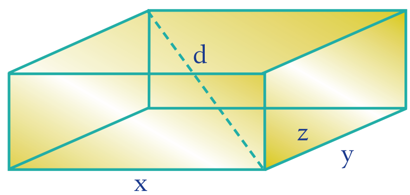
Es todo paralelepípedo recto cuyas bases son rectángulares.

$S_L = 2xy + 2xz$

$S_T = 2xy + 2xz + 2yz$

$V = xyz$

$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

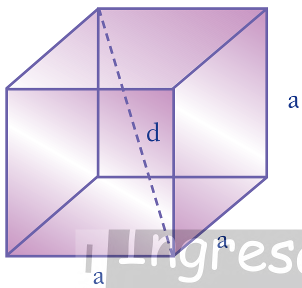


S_L = Suma de áreas de caras laterales

$S_T = S_L + S_b + S_1$

$$V = S_b \cdot \frac{a+b+c}{3}$$

CUBO



$S_L = 4a^2$

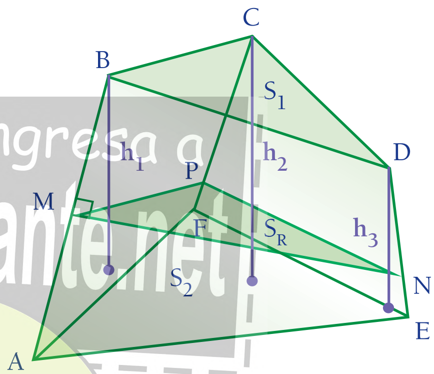
$S_T = 6a^2$

$V = a^3$

$d = a\sqrt{3}$

TRONCO DE UN PRISMA OBLICUO

Es aquel cuyas aristas laterales son oblícuas a las bases, sus caras laterales son trapecios, sus bases polígonos cualesquiera y desiguales.



S_L = Suma de caras laterales

$S_T = S_L + S_1 + S_2$

$$V = S_{SR} \cdot \frac{AB + FC + ED}{3}$$

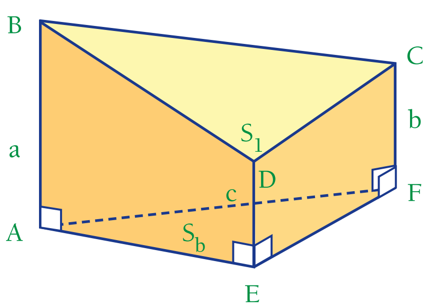
$$V = S_2 \cdot \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3}$$

TRONCO DE PRISMA

Es la parte de un prisma comprendida entre una base y un plano no paralelo a las bases.

TRONCO DE UN PRISMA RECTO

Es aquel cuyas aristas laterales son perpendiculares a la base principal y sus caras laterales son trapecios rectángulares, siendo sus bases polìgonos cualesquiera y desiguales.



PIRÁMIDE

Es un poliedro en el que una de las caras, llamada base, es un polígono cualquiera y las otras caras (laterales) son triángulos que tienen un vértice común.

ALTURA

Es la distancia del vértice de la pirámide, a la base.

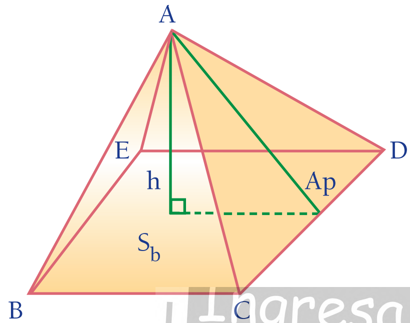
PIRÁMIDE REGULAR

Es aquella **cuya base es un polígono regular** y sus caras laterales son triángulos isósceles iguales.

La altura de una pirámide regular pasa por el centro de la circunferencia inscrita o circunscrita a la base de la pirámide.

APOTEMA DE LA PIRÁMIDE REGULAR

Es la altura de los triángulos isósceles que forman sus caras laterales.



$$S_L = p \cdot Ap$$

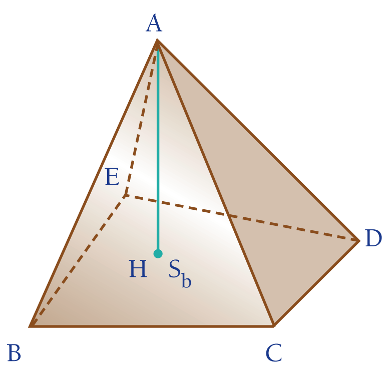
$$S_T = S_L + S_b$$

$$V = \frac{S_b \cdot h}{3}$$

PIRÁMIDE IRREGULAR

Es una pirámide cuya **base es un polígono irregular** y las caras laterales son triángulos desiguales.

> **NOTA.-**
> Si la pirámide es irregular, pero sus aristas laterales son iguales, la altura pasará por el centro de la circunferencia circunscrita a la base.

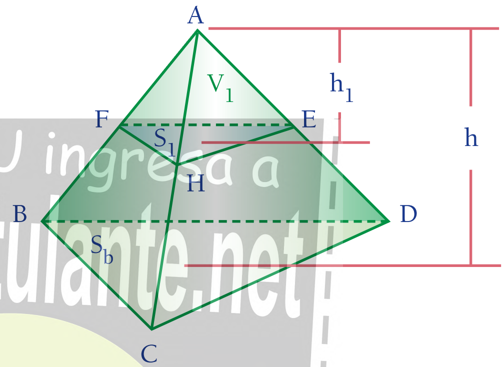


$$S_T = S_L + S_b$$

$$V = \frac{S_b \cdot h}{3}$$

SEMEJANZA DE PIRÁMIDES

Si se corta una pirámide cualquiera por un plano paralelo a la base se obtiene una pirámide pequeña, adyacente y semejante a la total, y recìprocamente, entonces:



1.- Las áreas de sus bases son entre sí como los cuadrados de los elementos homólogos.

$$\frac{S_1}{S_b} = \frac{h^2}{h^2} = \frac{AF^2}{AB^2} = \frac{AH^2}{AC^2} = \frac{FH^2}{BC^2}$$

2.- Sus volúmenes son entre sí, como los cubos de sus elementos homólogos.

$$\frac{V_1}{V} = \frac{h^3}{h^3} = \frac{AF^3}{AB^3} = \frac{AH^3}{AC^3}$$

TRONCO DE PIRÁMIDE

Es la parte de una pirámide **comprendida entre la base y una sección determinada** por un plano paralelo o no a la base. Esta sección y la base son denominadas bases del tronco; siendo las caras laterales, trapecios.

ALTURA DE UN TRONCO DE PIRÁMIDE

Es la longitud de la perpendicular trazada de una base a la otra.

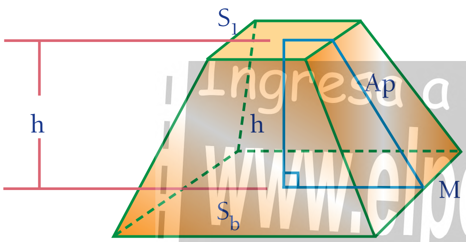
Los troncos de pirámides pueden ser regulares o irregulares.

TRONCO DE PIRÁMIDE REGULAR

Se llama así, cuando sus bases son polígonos regulares y paralelos, y sus caras laterales son trapecios isósceles e iguales.

APOTEMA DEL TRONCO DE PIRÁMIDE REGULAR

Es la altura de los trapecios que forman las caras laterales y une los puntos medios de las bases de estos trapecios.



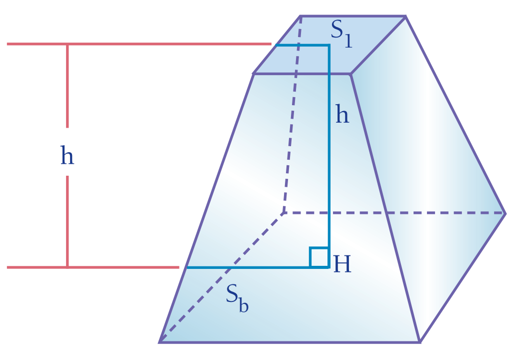
$$S_L = Ap\,(p + p_1)$$

$$S_T = S_L + S_1 + S_b$$

$$V = \frac{h\left(S_1 + S_b + \sqrt{S_1 \cdot S_b}\right)}{3}$$

TRONCO DE PIRÁMIDE IRREGULAR

Sus bases son paralelas, sus caras laterales son trapecios cualesquiera.



$$S_T = S_L + S_1 + S_b$$

$$V = \frac{h\left(S_1 + S_b + \sqrt{S_1 \cdot S_b}\right)}{3}$$

EL CONO

Se llama cono a todo sólido limitado por una superficie cónica y por la sección del plano que corta a todas las generatrices de la superficie cónica, determinándose la base del cono.

DEFINICIONES

ALTURA DE UN CONO

Es la longitud de la perpendicular trazada desde el vértice del cono a su base.

CONO CIRCULAR

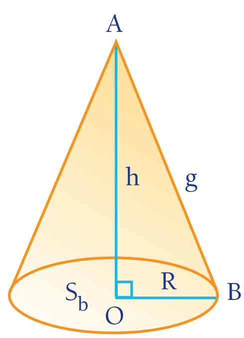
Es el que tiene por base un círculo.

CONO RECTO

Llámese cono recto al cono circular cuyo eje es perpendicular al círculo de la base en su centro. El eje de un cono recto se confunde con la altura.

CONO DE REVOLUCIÓN

Llámase cono de revolución, o recto, al que se supone engendrado por la rotación de la hipotenusa de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.

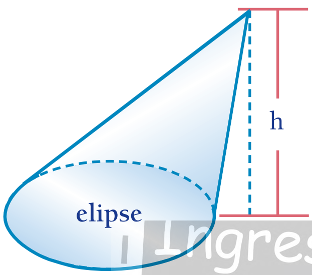


$$S_L = \pi \cdot R \cdot g \qquad S_T = S_L + S_b$$

$$V = \frac{1}{3} B \cdot h \qquad V = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3}$$

CONO OBLICUO

Es aquel cuya base es una elipse y cuyo eje no es perpendicular a la base.



$$V = \frac{S_b \cdot h}{3}$$

o:

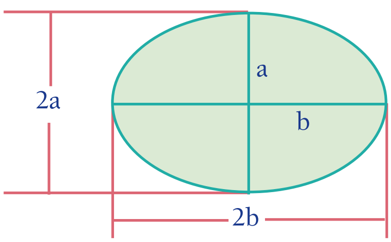
$$V = \frac{\pi \cdot a \cdot b \cdot h}{3}$$

ELIPSE

a = radio mínimo

b = radio máximo

$$S = \pi ab$$



SEMEJANZA DE CONOS

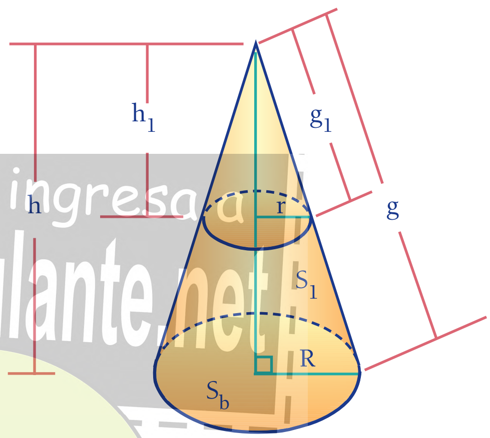
Si se corta un cono cualesquiera por un plano paralelo a su base, se obtiene un cono pequeño o deficiente semejante al total y recíprocamente, entonces:

1.- Las áreas de las bases son entre sí como los cuadrados de los elementos homólogos.

2.- Los volúmenes son entre sí como los cubos de sus elementos homólogos.

$$\frac{S_1}{S_b} = \frac{h_1^2}{h^2} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{g_1^2}{g^2}$$

$$\frac{V_1}{V} = \frac{h_1^3}{h^3} = \frac{r^3}{R^3} = \frac{g_1^3}{g^3}$$

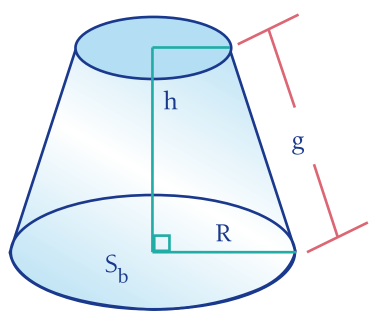


TRONCO DE CONO

Es la parte de un cono comprendida entre la base y una sección paralela o no a la base. A la sección y a la base del cono se les llama bases del tronco de cono.

ALTURA DE UN TRONCO DE CONO RECTO

Es la distancia entre sus bases. La altura pasa por los centros de las bases.



$$S_L = \pi \,.\, g\,(R + r)$$

$$S_T = S_L + S_1 + S_b$$

$$V = \frac{\pi \,.\, h(R^2 + r^2 + R \,.\, r)}{3}$$

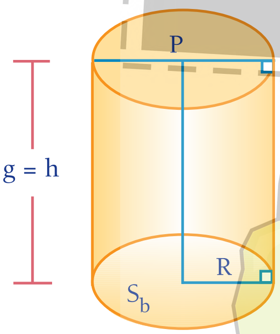
EL CILINDRO

Llámese cilindro a un sólido limitado por una superficie cilíndrica y dos superficies planas paralelas llamadas bases.

Los términos base, altura y área lateral son usados como en los prismas.

CILINDRO RECTO

Un cilindro es recto cuando su generatriz es perpendicular a las bases.



$$S_L = 2\pi \,.\, R \,.\, g$$

$$S_T = S_L + 2S_b$$

$$S_T = 2\pi R(g + R)$$

$$V = \pi \,.\, R^2 \,.\, g$$

Cilindro recto o de revolución, es el que se considera generado por la rotación de un rectángulo alrededor de unos de sus lados.

CILINDRO OBLICUO

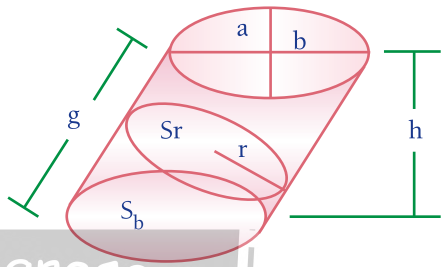
Cuando sus generatrices son oblícuas a las bases. Algunas veces sus bases son elipses y otras círculos.

$$S_L = 2\pi \,.\, r \,.\, g$$

$$S_T = S_L + 2S_b$$

$$S_T = \pi \,.\, a \,.\, b \,.\, h$$

$$V = \pi \,.\, r^2 \,.\, g$$

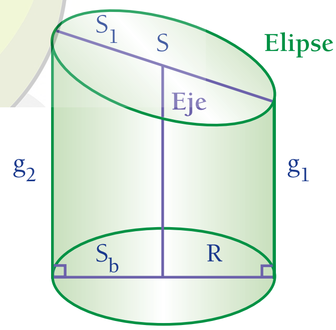


TRONCO DE CILINDRO

Es la parte de un cilindro comprendida entre una sección no paralela a la base del cilindro y una base de éste.

TRONCO DE CILINDRO RECTO

Cuando sus generatrices son perpendiculares a una base (principal) pero no a la otra.



$$S_L = 2\pi \,.\, R \,.\, EJE$$

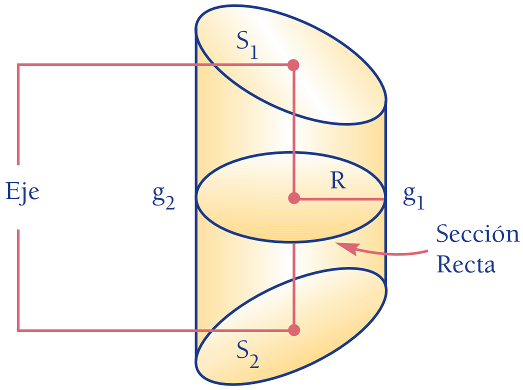
$$S_T = S_L + S_1 + S_b$$

$$V = \pi \,.\, R^2 \,.\, EJE$$

$$EJE = \frac{g_1 + g_2}{2}$$

TRONCO DE CILINDRO OBLICUO

Si sus generatrices son oblícuas a las bases.



$$S_L = 2\pi \cdot R \cdot EJE$$

$$S_T = S_L + S_1 + S_2$$

$$V = \pi \cdot R^2 \cdot EJE$$

$$EJE = \frac{g_1 + g_2}{2}$$

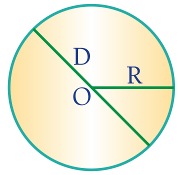
LA ESFERA

Es un sólido, limitado por una superficie curva, en la cual todos los puntos equidistan de un punto interior llamado centro.

La mitad de una esfera se llama hemisferio o semiesfera.

CÍRCULO MÁXIMO

Es el círculo que se obtiene al trazar un plano por el centro de la esfera.



SUPERFICIE Y VOLUMEN DE LA ESFERA

$$\boxed{S = 4\pi \cdot R^2}$$

$$\boxed{V = \frac{4\pi \cdot R^3}{3}}$$

$$\boxed{S = \pi \cdot D^2}$$

$$\boxed{V = \frac{\pi \cdot D^3}{6}}$$

PARTES DE ÁREA DE ESFERA

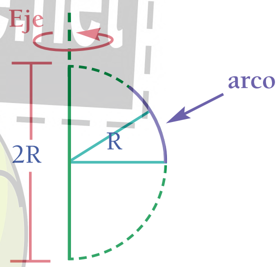
Estas son: la zona y el huso esférico.

1.- ZONA

Llámase zona esférica o zona simplemente, a la parte de la superficie de una esfera comprendida entre dos circunferencias paralelas llamadas bases.

La distancia entre las bases se llama altura de la zona.

Se la considera generada por la rotación de un arco de circunferencia que gira alrededor de un diámetro.



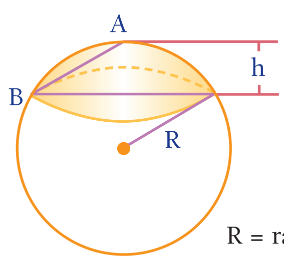
La zona puede ser de una base y de dos bases. A la de una base, se le llama también "casquete esférico".

ZONA DE UNA BASE O CASQUETE

$$\boxed{S = 2\pi \cdot R \cdot h}$$

o:

$$\boxed{S = \pi \cdot \overline{AB}^2}$$



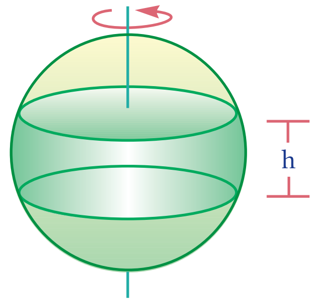
R = radio de esfera

H = altura de la zona

AB = cuerda del arco generador

ZONA DE DOS BASES

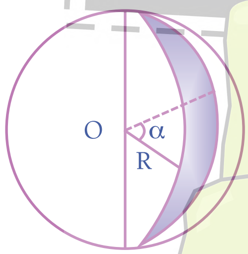
$$\boxed{S_L = 2\pi \cdot R \cdot h}$$



2.- HUSO ESFÉRICO

Llamado también "lúnula", es la parte de la superficie de una esfera limitada por las semicircunferencias de dos círculos máximos.

$$\boxed{S = \frac{\pi \cdot R \cdot \alpha}{360°}}$$



R = radio de la esfera

α = ángulo del huso

PARTES DE VOLUMENES DE UNA ESFERA

Estas son: segmento esférico, cuña esférica, sector esférico y anillo esférico

1.- SEGMENTO ESFÉRICO

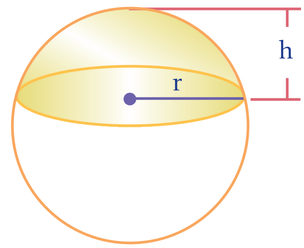
Es la porción de esfera limitada por una zona y por bases circulares.

Hay de dos clases:

segmento esférico de una base y segmento esférico de dos bases.

a. SEGMENTO ESFÉRICO DE UNA BASE

Limitado por un casquete y un círculo por base.



$$\boxed{S_T = S_{CASQUETE} + S_{CÍRCULO}}$$

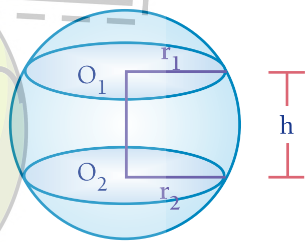
$$\boxed{V = \frac{\pi \cdot h^3}{6} + \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{2}}$$

h = altura de la zona

r = radio de la base de la zona

b.- SEGMENTO ESFÉRICO DE DOS BASES

Es parte del volumen de la esfera comprendida entre dos planos paralelos.



$$\boxed{S_T = S_{\substack{\text{zona de}\\ \text{dos bases}}} + S_{\text{círculo1}} + S_{\text{círculo2}}}$$

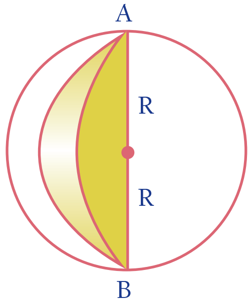
$$\boxed{V = \frac{\pi \cdot h^3}{6} + \pi\left(\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}\right)h}$$

h = altura de la zona

r_1, r_2 = radios de las bases.

2. -CUÑA ESFÉRICA

Es la parte de volumen de una esfera limitada por un huso y dos semicírculos máximos.



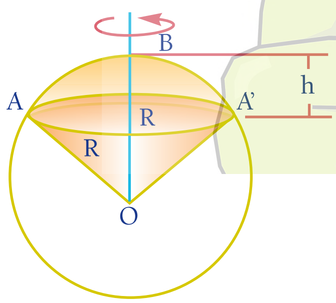
$$S_T = \pi R^2 + \frac{\alpha \cdot \pi \cdot R^2}{90^o}$$

$$V = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot R^3}{270^o}$$

3.- SECTOR ESFÉRICO

Es la parte del volumen de esfera generado por un "sector circular" que gira alrededor de un eje que pasa por el centro, en dos posiciones:

a.- Cuando el radio del sector circular coincide con el eje de giro: está limitado por un casquete esférico y una superficie lateral cónica.



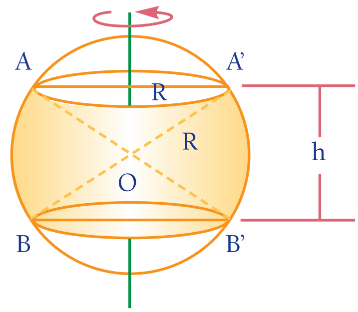
$$S_T = S_{CASQUETE} + S_{LCONO}$$

$$V = \frac{2\pi \cdot R^2 \cdot h}{3}$$

h = altura del casquete

R = radio de la esfera

b.- Cuando el radio no coincide con el eje de giro: está limitado por una zona de dos bases y áreas laterales de dos conos.



$$S_T = S_{\substack{\text{zona de} \\ \text{dos bases}}} + S_{LCONO_1} + S_{LCONO_2}$$

$$V = \frac{2\pi \cdot R^2 \cdot h}{3}$$

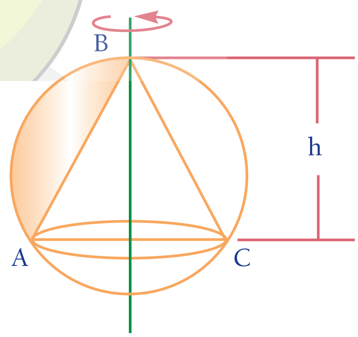
h = altura de la zona

R = radio de la esfera

4.- ANILLO ESFÉRICO

Es el volumen generado por un segmento circular que gira alrededor de un eje que pasa por su centro, en tres posiciones:

a.- Cuando un extremo de la cuerda del segmento circular pertenece al eje; está limitada por un casquete esférico y el área lateral de un cono.



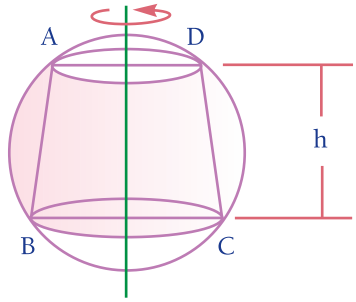
$$S_T = S_{Casquete} + S_{Lcono}$$

$$V = \frac{\pi \cdot AB^2 \cdot h}{6}$$

AB = cuerda del segmento circular

h = altura de la zona o casquete

b.- Cuando la cuerda del segmento circular no es paralela al eje de giro: está limitado por una zona de dos bases y el área lateral de un tronco de cono.



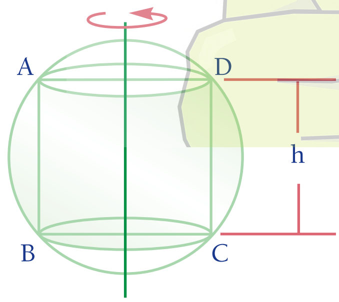
$$\boxed{S_T = S_{zona} + S_{Ltronco}}$$

$$\boxed{V = \frac{\pi \cdot \overline{AB}^2 \cdot h}{6}}$$

AB = cuerda del segmento circular

h = altura de la zona.

c.- Cuando la cuerda del segmento circular es paralela al eje del giro: está limitado por una zona de dos bases y el área lateral de un cilindro.



$$\boxed{S_T = S_{zona} + S_{Lcilindro}}$$

$$\boxed{V = \frac{\pi \cdot \overline{AB}^2 \cdot h}{6}}$$

$$\boxed{V = \frac{\pi \cdot \overline{AB}^3}{6}}$$

AB = cuerda del segmento circular

h = altura de la zona

SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

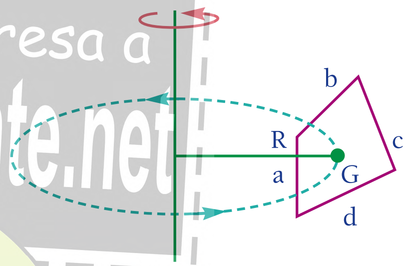
TEOREMA DE GULDIN PAPPUS (ÁREAS)

“La superficie de un sólido de revolución es igual al perímetro (2p) de la figura móvil multiplicado por la longitud (L) de la línea recorrida por el centro de gravedad de la citada figura”.

$$\boxed{S = 2p \cdot L}$$

$2p = a + b + c + d$

L = longitud de la circunferencia descrita por el centro de gravedad = $2\pi R$

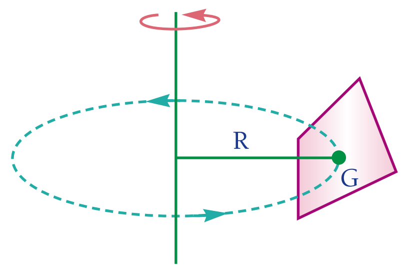


TEOREMA DE GULDIN PAPPUS (VOLUMEN)

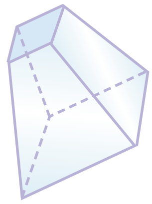
“El volumen de un sólido de revolución es igual al área (S) de la figura móvil, multiplicada por la longitud (L) de la línea recorrida por el centro de gravedad del cuerpo”.

$$\boxed{V = S \cdot L}$$

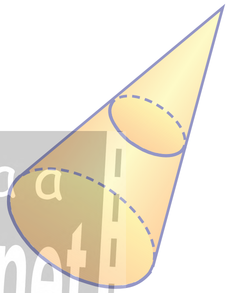
L = longitud de la línea descrita por el centro de gravedad = $2\pi R$

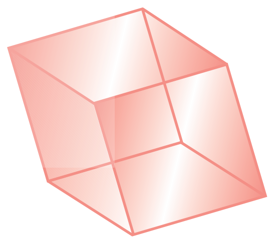


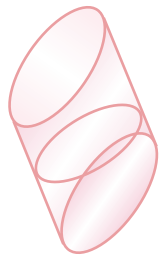
LEYENDA GENERAL



- V = volumen
- S_T = superficie o área total
- S.R. = sección recta
- $2p$ = perímetro de la base principal
- S_b = superficie o área de la base principal
- p' = semiperímetro de la base secundaria
- h = altura
- g_1, g_2 = generatrices
- S_L = superficie o área lateral
- S_2 = superficie o área de la base secundaria
- $S_{S.R.}$ = superficie o área de la base recta
- p = semiperímetro
- R, r = radios
- S_1 = superficie o área de la base secundaria
- g = generatrices







TRIGONOMETRÍA

DEFINICIÓN

Es aquella parte de la matemática elemental que estudia la medida de los tres ángulos de un triángulo en relación con sus lados.

MEDIDA DE ÁNGULOS

SISTEMAS DE MEDICIÓN DE ÁNGULOS

Hay tres sistemas para medir los ángulos; Sexagesimal, Centesimal y Radial.

SEXAGESIMAL

Toma como unidad de medida un arco que es igual a la 360 ava parte de la circunferencia, y a cada parte se le llama grado sexagesimal. Se simboliza así: º

Ejemplo: 30º Se lee: 30 grados sexagesimales

CENTESIMAL

Toma como unidad de medida un arco que es igual a la 400 ava parte de la circunferencia, y a cada parte se le llama grado centesimal. Se simboliza así: g.

Ejemplo: 40 g. Se lee: 40 grados centesimales

RADIAL

Toma como unidad de medida un arco de una longitud igual a la de su radio, y a esta longitud de arco se le llama radián. Se simboliza así: rad.

Ejemplo: 2,16 rad. Se lee: 2,16 radianes.

VALOR DE π

$$\pi = \frac{22}{7} \text{ (Arquímides)}$$

$$\pi = \frac{355}{113} \text{ (Mecio)}$$

EQUIVALENCIA ENTRE LOS TRES SISTEMAS

1 circunferencia < > 360º < > 400 < > 2π rad.

1º < > 60' y 1' < > 60"

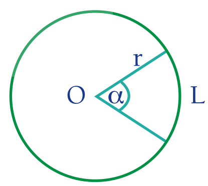
1 g < > 100 min y 1 min < > 100 s

$$\boxed{\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}}$$

LONGITUD DE UN ARCO:

$$\boxed{L = r \,.\, \alpha}$$

α : ángulo central, debe estar en radianes



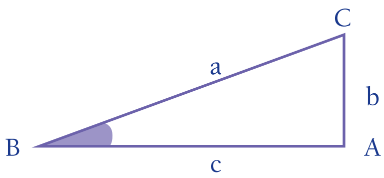
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

FUNCIONES BÁSICAS

$$\text{sen } B = \frac{b}{a} \qquad \cos B = \frac{c}{a}$$

$$\text{tg } B = \frac{b}{c} \qquad \text{ctg } B = \frac{c}{b}$$

$$\sec B = \frac{a}{c} \qquad \text{cosec} = \frac{a}{b}$$



TABLAS DE VALOR DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE TRIÁNGULOS NOTABLES

VALORES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE 30º Y 60º (30º = π/6 Y 60º = π/3)

$\text{sen } 30° = \dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $\text{sen } 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

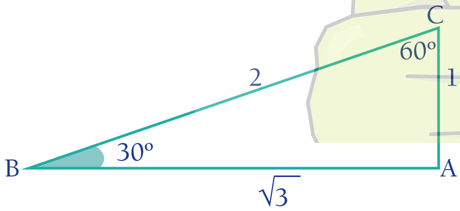
$\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\cos 60° = \dfrac{1}{2}$

$\text{tg } 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $\qquad$ $\text{tg } 60° = \sqrt{3}$

$\text{ctg } 30° = \sqrt{3}$ $\qquad$ $\text{ctg } 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\sec 30° = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ $\qquad$ $\sec 60° = 2$

$\text{cosec } 30° = 2$ $\qquad$ $\text{cosec } 60° = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

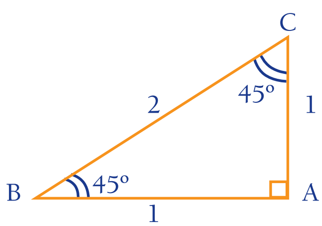


VALORES DE LAS FUNCIONES DE 45º (45º = π/4)

$\text{sen } 45^a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{tg } 45° = 1$ $\qquad$ $\text{ctg } 45° = 1$

$\sec 45° = \sqrt{2}$ $\qquad$ $\text{cosec } 45° = \sqrt{2}$



VALORES APROXIMADOS DE LAS FUNCIONES DE 37º y 53º (37º = π/4,865 y 53º ≃ π/3,396)

$\text{sen } 37° = \dfrac{3}{5}$ $\qquad$ $\text{sen } 53° = \dfrac{4}{5}$

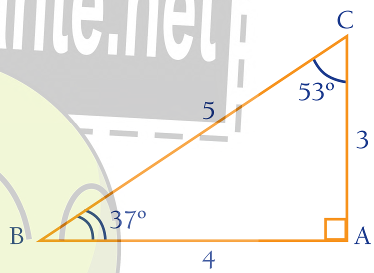
$\cos 37° = \dfrac{4}{5}$ $\qquad$ $\cos 53° = \dfrac{3}{5}$

$\text{tg } 37° = \dfrac{3}{4}$ $\qquad$ $\text{tg } 53° = \dfrac{4}{3}$

$\text{ctg } 37° = \dfrac{4}{3}$ $\qquad$ $\text{ctg } 53° = \dfrac{3}{4}$

$\sec 37° = \dfrac{5}{4}$ $\qquad$ $\sec 53° = \dfrac{5}{3}$

$\text{cosec } 37° = \dfrac{5}{3}$ $\qquad$ $\text{cosec } 53° = \dfrac{5}{4}$



VALORES APROXIMADOS DE LAS FUNCIONES DE 15º y 75º (15º = π/12 y 75º = π/2,4)

$\text{sen } 15° = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ $\qquad$ $\text{sen } 75° = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

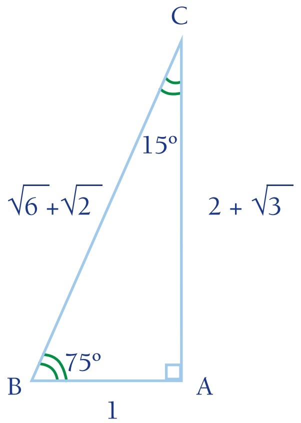
$\cos 15° = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ $\qquad$ $\cos 75° = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

$\text{tg } 15° = 2 - \sqrt{3}$ $\qquad$ $\text{tg } 75° = 2 + \sqrt{3}$

$\text{ctg } 15° = 2 + \sqrt{3}$ $\qquad$ $\text{ctg } 75° = 2 - \sqrt{3}$

$\sec 15° = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ $\qquad$ $\sec 75° = \sqrt{6} + \sqrt{2}$

$\text{cosec } 15° = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ $\qquad$ $\text{cosec } 75° = \sqrt{6} - \sqrt{2}$



VALORES APROXIMADOS DE LAS FUNCIONES DE 16° y 74° (16° = π/11,25 y 74° ≃ π/2,43)

$$\text{sen } 16^\circ = \frac{7}{25} \qquad \text{sen } 74^\circ = \frac{24}{25}$$

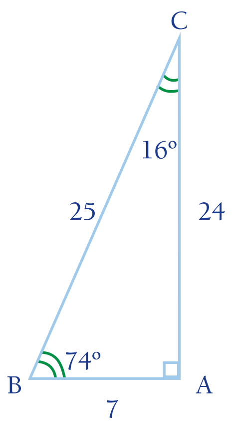
$$\cos 16^\circ = \frac{24}{25} \qquad \cos 74^\circ = \frac{7}{25}$$

$$\text{tg } 16^\circ = \frac{7}{24} \qquad \text{tg } 74^\circ = \frac{24}{7}$$

$$\text{ctg } 16^\circ = \frac{24}{7} \qquad \text{ctg } 74^\circ = \frac{7}{24}$$

$$\sec 16^\circ = \frac{25}{24} \qquad \sec 74^\circ = \frac{25}{7}$$

$$\text{cosec } 16^\circ = \frac{25}{7} \qquad \text{cosec } 74^\circ = \frac{25}{24}$$



VALORES APROXIMADOS DE LAS FUNCIONES DE 18° Y 72° (18° = π/10 Y 72° = π/2,5)

$$\text{sen } 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \qquad \text{sen } 72^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

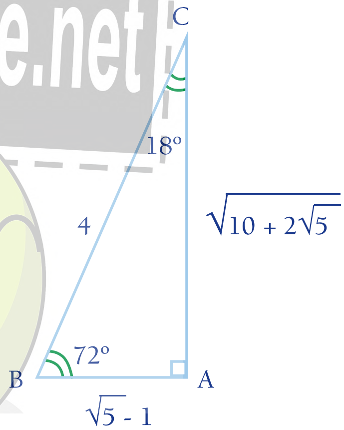
$$\cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \qquad \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\text{tg } 18^\circ = \frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5} \qquad \text{tg } 72^\circ = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

$$\text{ctg } 18^\circ = \sqrt{5+2\sqrt{5}} \qquad \text{ctg } 72^\circ = \frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$$

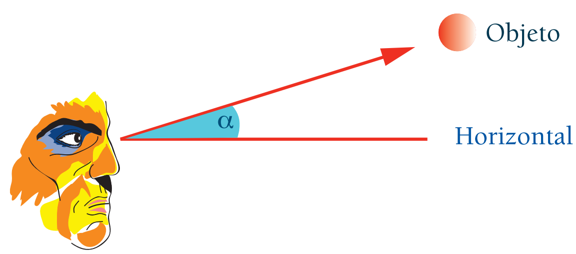
$$\sec 18^\circ = \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{5} \qquad \sec 72^\circ = \sqrt{5}+1$$

$$\text{cosec } 18^\circ = \sqrt{5}+1 \qquad \text{cosec } 72^\circ = \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{5}$$

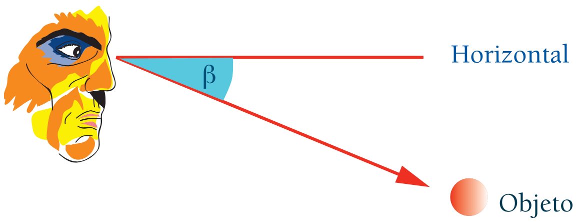


ÁNGULOS DIRECTRICES

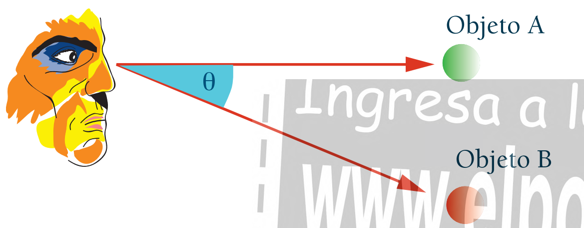
Ángulo de Elevación:



Ángulo de Depresión:



Ángulo que Subtiende:



Los ángulos de elevación (α) y depresión (β) siempre están en plano vertical. El ángulo que subtiende (θ) dos objetos observados puede estar en cualquier plano.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS O CIRCULARES EN EL CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO DE RADIO = 1

sen a = PM

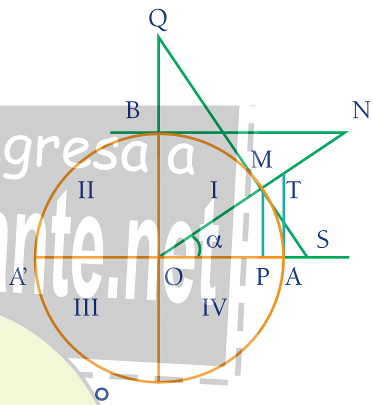
cos a = OP

tg a = AT

ctg a = BN

sec a = OS

cosec a = OQ



$\overset{\frown}{AM} = a = \alpha$

SIGNOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS SEGÚN EL CUADRANTE

FUNCIÓN	I C	II C	III C	IV C
seno	+	+	-	-
coseno	+	-	-	+
tangente	+	-	+	-
cotangente	+	-	+	-
secante	+	-	-	+
cosecante	+	+	-	-

VARIACIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS SEGÚN EL CUADRANTE

FUNCIÓN	I C	II C	III C	IV C
seno	c: de 0 a 1	d: de 1 a 0	d: de 0 a -1	c: de -1 a 0
coseno	d: de 1 a 0	d: de 0 a -1	c: de -1 a 0	c: de 0 a 1
tangente	c: de 0 a ∞	c: de -∞ a 0	c: de 0 a ∞	c: de -∞ a 0
cotangente	d: de ∞ a 0	d: de 0 a -∞	d: de ∞ a 0	d: de 0 a -∞
secante	c: de 1 a ∞	c: de -∞ a – 1	d: de -1 a -∞	d: de ∞ a 1
cosecante	d: de ∞ a 1	c: de 1 a ∞	c: de - ∞ a -1	d: de -1 a - ∞

c = crece ; d = decrece

INTERVALO DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Intervalo es el espacio o valor dentro de dos extremos en el cual se encuentra el valor de la función. Se denota así:

[ ] intervalo cerrado

⟨ ⟩ intervalo abierto

⟨] intervalo abierto cerrado

[⟩ intervalo cerrado abierto

sen x ε [-1; + 1]

cos x ε [-1; + 1]

tg x ε ⟨ -∞ ; + ∞ ⟩

ctg x ε ⟨ -∞ ; + ∞⟩

sec x ε ⟨ -∞ ; -1] ∨ [+1; + ∞ ⟩

cosec x ε ⟨ -∞ ; -1] ∨ [+1; + ∞ ⟩

DOMINIO Y RANGO DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

En las funciones trigonométricas, DOMINIO es el valor del ángulo o arco; RANGO es el valor de la función. Las funciones trigonométricas no son BIUNIVOCAS; es decir, para un ángulo hay más de un valor para su función, repitiéndose dentro de un período.

FUNCIÓN	DOMINIO	RANGO	PERÍODO
sen x	∀ x	[-1; +1]	2π
cos x	∀ x	[-1; +1]	2π
tg x	∀ x - { 2n + 1} $\frac{\pi}{2}$	ℝ o ⟨ -∞ ; + ∞ ⟩	π
ctg x	∀ x - {nπ}	ℝ o ⟨ -∞ ; + ∞ ⟩	π
sec x	∀ x - { 2n + 1} $\frac{\pi}{2}$	ℝ - ⟨ -1; +1⟩	2π
cosec x	∀ x - {nπ}	ℝ - ⟨ -1; +1⟩	2π

ℝ = número real

RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

$$\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$$

$$\text{tg } a = \frac{\text{sen } a}{\cos a}$$

$$\text{tg } a \cdot \text{ctg } a = 1$$

$$1 + \text{tg}^2 a = \sec^2 a$$

$$\text{ctg } a = \frac{\cos a}{\text{sen } a}$$

$$\text{sen } a \cdot \text{cosec } a = 1$$

$$\cos a \cdot \sec a = 1$$

$$1 + \text{ctg}^2 a = \text{co sec}^2 a$$

RELACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN TÉRMINOS DE UNA SOLA

	sen a	cos a	tg a	ctg a	sec a	cosec a
sen		$\pm\sqrt{1-\cos^2 a}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\text{tg}^2 a}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\text{ctg}^2 a}}$	$\frac{\pm\sqrt{\sec^2 a - 1}}{\sec a}$	$\frac{1}{\text{cosec } a}$
cos a	$\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 a}$		$\frac{\text{tg } a}{\pm\sqrt{1+\text{tg}^2 a}}$	$\frac{\text{ctg } a}{\pm\sqrt{1+\text{ctg}^2 a}}$	$\frac{1}{\cos a}$	$\frac{\pm\sqrt{\text{cosec}^2 a - 1}}{\text{cosec } a}$
tg a	$\frac{\text{sen } a}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 a}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 a}}{\cos a}$		$\frac{1}{\text{ctg } a}$	$\pm\sqrt{\sec^2 a - 1}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{\text{cosec}^2 a - 1}}$
ctg a	$\frac{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 a}}{\text{sen } a}$	$\frac{\cos a}{\pm\sqrt{1-\cos^2 a}}$	$\frac{1}{\text{tg } a}$		$\frac{1}{\pm\sqrt{\sec^2 a - 1}}$	$\pm\sqrt{\text{cosec}^2 a - 1}$
sec a	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 a}}$	$\frac{1}{\cos a}$	$\pm\sqrt{1+\text{tg}^2 a}$	$\frac{\pm\sqrt{1+\text{ctg}^2 a}}{\text{ctg } a}$		$\frac{\text{cosec } a}{\pm\sqrt{\text{cosec}^2 a - 1}}$
cosec a	$\frac{1}{\text{sen } a}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2 a}}$	$\frac{\pm\sqrt{1+\text{tg}^2 a}}{\text{tg } a}$	$\pm\sqrt{1+\text{ctg}^2 a}$	$\frac{\sec a}{\pm\sqrt{\sec^2 a - 1}}$	

ARCOS COMPUESTOS

FUNCIONES DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE ARCOS

$$\text{sen}(a \pm b) = \text{sen } a \,.\, \cos b \pm \text{sen } b \,.\, \cos a$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \,.\, \cos b \mp \text{sen } a \,.\, \text{sen } b$$

$$\text{tg}(a \pm b) = \frac{\text{tg } a \pm \text{tg } b}{1 \mp \text{tg } a \,.\, \text{tg } b}$$

$$\text{ctg}(a \pm b) = \frac{\text{ctg } a \,.\, \text{ctg } b \mp 1}{\text{ctg } b \pm \text{ctg } a}$$

FUNCIONES DE LA SUMA DE TRES ARCOS

$$\text{sen}(a + b + c) = \text{sen } a \,.\, \cos b \,.\, \cos c - \text{sen } a \,.\, \text{sen } b \,.\, \text{sen } c + \text{sen } b \,.\, \cos a \,.\, \cos c + \text{sen } c \,.\, \cos a \,.\, \cos b$$

$$\cos(a + b + c) = \cos a \,.\, \cos b \,.\, \cos c - \text{sen } b \,.\, \text{sen } c \,.\, \cos a - \text{sen } a \,.\, \text{sen } c \,.\, \cos b - \text{sen } a \,.\, \text{sen } b \,.\, \cos c$$

$$\text{tg}(a+b+c) = \frac{\text{tag } a + \text{tg } b + \text{tg } c - \text{tg } a \,.\, \text{tg } b \,.\, \text{tg } c}{1 - \text{tg } a \,.\, \text{tg } b - \text{tg } a \,.\, \text{tg } c - \text{tg } b \,.\, \text{tg } c}$$

EQUIVALENCIA DE LAS FUNCIONES DE LOS ARCOS COMPLEMENTARIOS

Sean: $\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$ y "a" dos arcos complementarios:

$$\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + a = \frac{\pi}{2}$$

se cumple:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \text{sen } a$$

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \text{ctg } a$$

Ejemplo:

$$\text{sen } 40^o = \cos 50^o$$

puesto que:

$$40^o + 50^o = 90^o$$

EQUIVALENCIAS DE LAS FUNCIONES DE LOS ARCOS SUPLEMENTARIOS

Sean: $(\pi - a)$ y "a" dos arcos suplementarios, entonces:

$$(\pi - a) + a = \pi$$

se cumple:

$$\text{sen}(\pi - a) = \text{sen } a$$

$$\cos(\pi - a) = -\cos a$$

$$\text{tg}(\pi - a) = -\text{tg } a$$

Ejemplos:

$$\cos 120^o = -\cos 60^o$$

notar que:

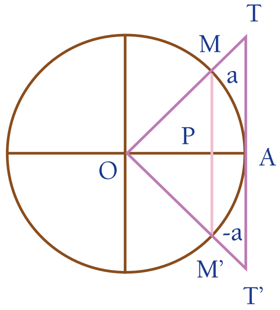
$$120^o + 60^o = 180^o$$

$$\text{tg } 130^o = -\text{tg } 50$$

EQUIVALENCIAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS ARCOS NEGATIVOS

Sean "a" y "-a" dos arcos iguales pero de signo cotrario. Es decir, del mismo origen pero de sentido contrario. (En el gráfico todos de origen A).

sen a = MP	;	sen (-a) = M'P = -MP
cos a = OP	;	cos (-a) = OP = OP
tg a = AT	;	tg (-a) = AT' = -AT



Luego:

$$\text{sen}\,(-a) = -\text{sen}\,a$$

$$\text{cosec}\,(-a) = -\text{cosec}\,a$$

$$\cos\,(-a) = \cos\,a$$

$$\sec\,(-a) = \sec\,a$$

$$\text{tg}\,(-a) = -\text{tg}\,a$$

$$\text{ctg}\,(-a) = -\text{ctg}\,a$$

FUNCIONES DE ARCOS DOBLES

$$\text{sen}\,2a = 2\,\text{sen}\,a\,.\,\cos\,a$$

$$\text{sen}\,2a = \frac{2\,\text{tg}\,a}{1 + \text{tg}^2 a}$$

$$\cos\,2a = \cos^2 a - \text{sen}^2\,a$$

$$\cos\,2a = \frac{1 - \text{tg}^2 a}{1 + \text{tg}^2 a}$$

$$\cos\,2a = 2\cos^2 a - 1$$

$$\cos\,2a = 1 - 2\,\text{sen}^2 a$$

$$\text{tg}\,2a = \frac{2\,\text{tg}\,a}{1 - \text{tg}^2 a}$$

FUNCIONES DE ARCO MITAD

$$1 - \cos\,a = 2\,\text{sen}^2\,\frac{a}{2}$$

$$\text{sen}\,\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\,a}{2}}$$

$$1 + \cos\,a = 2\cos^2\,\frac{a}{2}$$

$$\cos\,\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\,a}{2}}$$

$$\frac{1 - \cos\,a}{1 + \cos\,a} = \text{tg}^2\,\frac{a}{2}$$

FUNCIONES DE ARCOS TRIPLES

$$\text{sen}\,3a = 3\,\text{sen}\,a - 4\,\text{sen}^3 a$$

$$\cos\,3a = 4\cos^3 a - 3\cos\,a$$

$$\text{tg}\,3a = \frac{3\,\text{tg}\,a - \text{tg}^3 a}{1 - 3\,\text{tg}^2 a}$$

FUNCIONES AUXILIARES

$$\text{seno verso}\,a = 1 - \cos\,a$$

$$\text{cos verso}\,a = 1 - \text{sen}\,a$$

$$\text{ex-sec}\,a = \sec\,a - 1$$

NOTA: A la **ex-secante** se le llama también **external**.

TRANSFORMACIÓN A PRODUCTO

SUMA Y DIFERENCIA DE SENOS

$$\text{sen}\,A + \text{sen}\,B = 2\,\text{sen}\,\frac{A + B}{2}\cos\,\frac{A - B}{2}$$

$$\text{sen}\,A - \text{sen}\,B = 2\cos\,\frac{A + B}{2}\,\text{sen}\,\frac{A - B}{2}$$

SUMA Y DIFERENCIA DE COSENOS

$$\boxed{\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}}$$

$$\boxed{\cos A - \cos B = -2\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}}$$

LÍMITES TRIGONOMÉTRICOS

1. En el primer cuadrante se cumple que el arco es mayor que el seno pero menor que su tangente.

$$\boxed{\operatorname{sen} a < a < \operatorname{tg} a}$$

o:

$$\boxed{0 < a < \frac{\pi}{2}}$$

2. Cuando el arco es muy pequeño; es decir, cercano a cero, el seno, el arco y la tangente tienden a confundirse.

y:

$$\boxed{\lim_{a\to 0}\frac{a}{\operatorname{sen} a} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{a\to 0}\frac{a}{\operatorname{tg} a} = 1}$$

De donde:

$$\operatorname{sen} a = a = \operatorname{tg} a \Leftrightarrow a \to 0$$

Ejemplo:

¿Cuál es el límite de $\dfrac{3x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$, cuando x tiende a cero? $(x \to 0)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{3\,\frac{2x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{6\,\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$$

$$= 6\,.\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}} = 6\,.\,1$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{3x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}} = 6$$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Son expresiones que dan el valor del ángulo “en forma indicada”.

Sea “A” un arco ó ángulo:		denotación inglesa	denotación francesa
$\operatorname{sen} A = m$	$\Rightarrow$	$A = \text{arco sen } m$	$A = \operatorname{sen}^{-1} m$
$\cos A = n$	$\Rightarrow$	$A = \text{arco cos } n$	$A = \cos^{-1} n$
$\operatorname{tg} A = p$	$\Rightarrow$	$A = \text{arco tg } p$	$A = \operatorname{tg}^{-1} p$
$\operatorname{ctg} A = q$	$\Rightarrow$	$A = \text{arco ctg } q$	$A = \operatorname{ctg}^{-1} q$
$\sec A = r$	$\Rightarrow$	$A = \text{arco sec } r$	$A = \sec^{-1} r$
$\operatorname{cosec} A = s$	$\Rightarrow$	$A = \text{arco cosec } s$	$A = \operatorname{cosec}^{-1} s$

De donde:

$$\operatorname{sen}(\text{arco sen } m) = m \Leftrightarrow \text{arco sen}(\operatorname{sen} A) = A$$

$$\cos(\text{arco cos } n) = n \Leftrightarrow \text{arco cos}(\cos A) = A$$

$$\operatorname{tg}(\text{arco tg } p) = p \Leftrightarrow \text{arco tg}(\operatorname{tg} A) = A$$

Ejemplo: Calcular

$$y = \text{arco sen}\frac{\sqrt{3}}{2} + \text{arco tg}\frac{1}{2} + \text{arco sec}\frac{\sqrt{10}}{3} \qquad (1)$$

Procedimiento. Llamando:

$$A = \text{arco sen}\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{sen } A = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = 60º$$

$$B = \text{arco tg}\frac{1}{2} \Rightarrow \text{tg } B = \frac{1}{2}$$

$$C = \text{arco sec}\frac{\sqrt{10}}{3} \Rightarrow \sec C = \frac{\sqrt{10}}{3} \Rightarrow \text{tg } C = \frac{1}{3}$$

Sustituyendo en (1):

$$y = A + B + C$$

o sea:

$$y = 60 + B + C$$

$$y - 60 = B + C$$

tomando tangente:

$$\text{tg }(y - 60) = \text{tg }(B + C)$$

$$\text{tg }(y - 60) = \frac{\text{tg } B + \text{tg } C}{1 - \text{tg } B \,.\, \text{tg } C}$$

sustituyendo valores de tg B y tg C:

$$\text{tg }(y - 60\,) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1$$

$$\text{tg }(y - 60) = 1$$

$$y - 60 = 45º$$

$$y = 105º$$

DOMINIO Y RANGO DE LAS FUNCIONES INVERSAS

En las funciones inversas, como su nombre lo indica, el DOMINIO de una función es el RANGO de la inversa y viceversa, consideradas dentro de un INTERVALO.

FUNCIÓN INVERSA	DOMINIO	RANGO
arco sen x	$[-1\,;+1\,]$	$\left[-\frac{\pi}{2}\;;\;\frac{\pi}{2}\right]$
arco cos x	$[-1\,;+1\,]$	$\left[0\;;\;\frac{\pi}{2}\right]$
arco tg x	$\mathbb{R}$ o $\langle -\infty\;;\;+\infty\rangle$	$\left[-\frac{\pi}{2}\;;\;\frac{\pi}{2}\right]$
arco ctg x	$\mathbb{R}$ o $\langle -\infty\;;\;+\infty\rangle$	$\langle 0;\pi\rangle$
arco sec x	$\langle -\infty\;;\;-1] \cup [\,1\,;+\infty\rangle$	$\left[0\;;\;\frac{\pi}{2}\right\rangle \cup \left\langle\frac{\pi}{2}\;;\pi\right]$
arco cosec x	$\langle -\infty\;;-1] \cup [\,1\,;+\infty\rangle$	$\left[-\frac{\pi}{2};0\right\rangle \cup \left\langle 0\;;\;\frac{\pi}{2}\right]$

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

La solución puede ser la más pequeña de todas (solución principal) o puede ser una expresión algebraica que incluya todos los arcos que satisfagan la ecuación dada (solución general).

Expresión de todos los arcos que tienen la misma función trigonométrica.

Que tienen el mismo seno:

$$\boxed{X = K\pi + (-1)^k \alpha}$$

α = solución principal

Que tiene el mismo coseno:

$$\boxed{X = 2K\pi \pm \beta}$$

β = solución principal

Que tienen la misma tangente:

$$\boxed{X = K\pi + \theta}$$

θ = solución principal

SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES

Para resolver ecuaciones debe tenerse presente que:

$\operatorname{sen} x = a$	$\Rightarrow$	$x = \operatorname{sen}^{-1} a$	$\wedge$	$X = k\pi + (-1)^K \operatorname{sen}^{-1} a$
$\cos x = b$	$\Rightarrow$	$x = \cos^{-1} b$	$\wedge$	$X = 2k\pi \pm \cos^{-1} b$
$\operatorname{tg} x = c$	$\Rightarrow$	$x = \operatorname{tg}^{-1} c$	$\wedge$	$X = k\pi + \operatorname{tg}^{-1} c$
$\operatorname{ctg} x = d$	$\Rightarrow$	$x = \operatorname{ctg}^{-1} d$	$\wedge$	$X = k\pi + \operatorname{ctg}^{-1} d$
$\sec x = e$	$\Rightarrow$	$x = \sec^{-1} e$	$\wedge$	$X = 2k\pi \pm \sec^{-1} e$
$\operatorname{cosec} x = f$	$\Rightarrow$	$x = \operatorname{cosec}^{-1} f$	$\wedge$	$X = k\pi + (-1)^K \operatorname{cosec}^{-1} f$

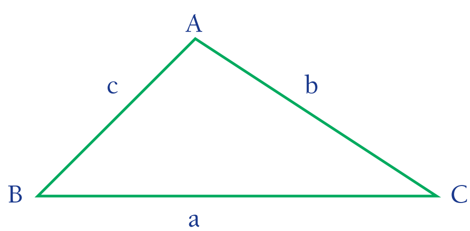
Donde: $K \varepsilon \mathbb{Z}$; x = solución principal y X = solución general

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Para resolver triángulos que equivale a calcular sus lados o sus ángulos, debe conocerse las siguientes leyes o propiedades:

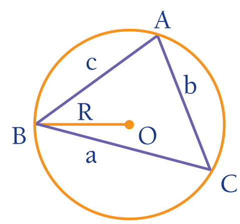
TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

1. **Ley de los senos:** En todo triángulo, los lados son directamente proporcionales a sus lados opuestos.



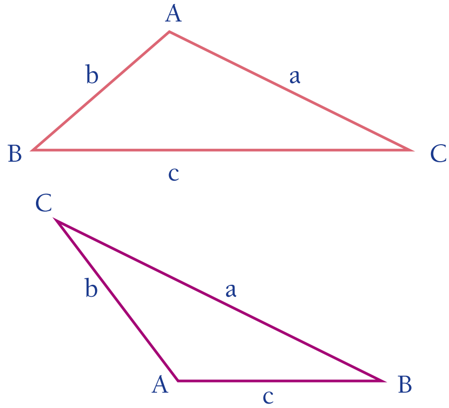
$$\boxed{\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}}$$

2. **Corolario:** En todo triángulo inscrito en una circunferencia, la relación de la Ley de los senos es constante e igual al diámetro de la circunferencia circunscrita.



$$\boxed{\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R}$$

3. Ley de cosenos (Carnot).- Para todo triángulo:

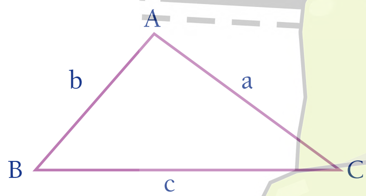


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \,.\, b \,.\, c \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \,.\, a \,.\, c \cos B$$

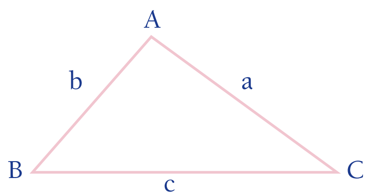
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \,.\, a \,.\, b \cos C$$

4. Ley de las tangentes (Nepper).- Para todo triángulo:



$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \dfrac{A+B}{2}}{\operatorname{tg} \dfrac{A-B}{2}}$$

5. Ley de las proyecciones.- Para todo triángulo:



$$a = b \,.\, \cos C + c \,.\, \cos B$$

$$b = a \,.\, \cos C + c. \cos A$$

$$c = a \,.\, \cos B + b \,.\, \cos C$$

CÁLCULO DE ÁNGULOS (Fórmula de Briggs)

Si:

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

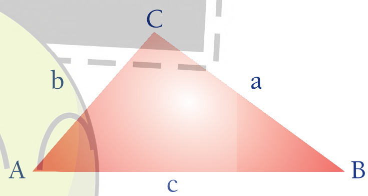
$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$\operatorname{sen} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}$$

CÁLCULO DE SUPERFICIES

Fórmula Trigonométricas



$$S = \frac{a \,.\, b}{2} \operatorname{sen} C$$

$$S = \frac{b \,.\, c}{2} \operatorname{sen} A \qquad \text{(I)}$$

$$S = \frac{a \,.\, c}{2} \operatorname{sen} B$$

Fórmulas Geométricas

$$S = p \,.\, r \qquad S = \frac{a \,.\, b \,.\, c}{4R}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad \text{(II)}$$

$$S = \rho a \,(p-a)$$

Donde:

p = semiperímetro

r = radio círculo inscrito

R = radio círculo circunscrito

ρa = radio del círculo exinscrito al lado a

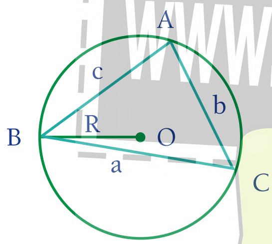
ELEMENTOS SECUNDARIOS EN LA SOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Para calcular los elementos secundarios, lo aconsejable es despejar las fórmulas conocidas, tales como las siguientes:

RADIOS

RADIO CIRCUNSCRITO:

Es el radio "R" de la circunferencia circunscrita al triángulo.



1.- De: $2R = \dfrac{a}{\text{sen } A}$

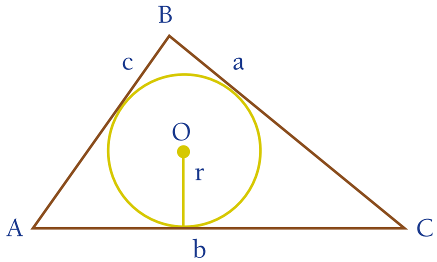
$$\boxed{\Rightarrow R = \frac{a}{2\text{sen}A}}$$

2.- De: $\dfrac{abc}{4R} = S$

$$\boxed{\Rightarrow R = \frac{a\,.\,b\,.\,c}{4\,.\,S}}$$

RADIO INSCRITO O INRADIO:

Es el radio "r" de la circunferencia inscrita en el triángulo.



1.- De: $pr = S$

$$\boxed{\Rightarrow r = \frac{S}{p}}$$

2.- De: $\dfrac{r}{p - a} = \text{tg}\dfrac{A}{2}$

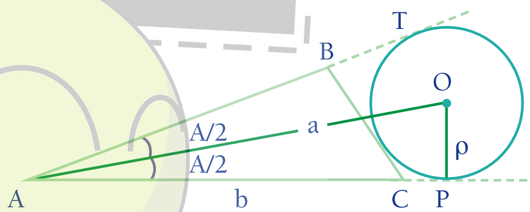
$$\boxed{\Rightarrow r = (p - a)\text{tg}\frac{A}{2}}$$

3.- De: $a = r\left(\text{ctg}\dfrac{B}{2} + \text{ctg}\dfrac{C}{2}\right)$

$$\boxed{\Rightarrow r = \frac{a}{\text{ctg}\dfrac{B}{2} + \text{ctg}\dfrac{C}{2}}}$$

RADIO EX-INSCRITO:

Es el radio "ρ" de la circunferencia, ex-inscrito a uno de los lados del triángulo.



De la propiedad:

$AP = AT = \dfrac{a + b + c}{2}$, se demuestra:

1.- $\dfrac{a + b + c}{2}\,.\,\text{tg}\dfrac{A}{2}$

o :

$$\boxed{\rho = p\,.\,\text{tg}\frac{A}{2}}$$

2.- De: $S = \rho\,(p - a)$

o:

$$\boxed{\rho = \frac{S}{p - a}}$$

3.- De: $a = \rho\left(\text{tg}\,\frac{B}{2} + \text{tg}\,\frac{C}{2}\right)$

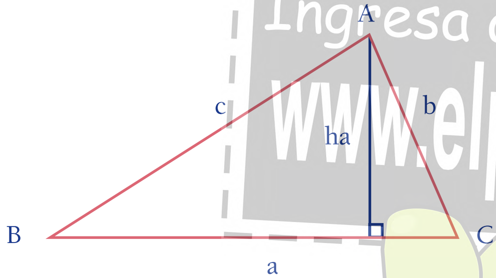
$$\Rightarrow \rho = \frac{a}{\text{tg}\,\frac{B}{2} + \text{tg}\,\frac{C}{2}}$$

CEVIANAS

Son rectas que partiendo de un vértice tocan un punto del lado opuesto. Las principales son: altura, mediana, bisectriz interna y bisectriz externa.

ALTURA

Es la perpendicular trazada de un vértice al lado opuesto.



1.- $\boxed{ha = b\,.\,\text{sen}\,C}$

o:

$\boxed{ha = c\,.\,\text{sen}\,B}$

2.- $\boxed{ha = 2\,.\,R\,.\,\text{sen}\,b\,.\,\text{sen}\,C}$

3.- $\boxed{ha = \frac{2\,.\,S}{a}}$

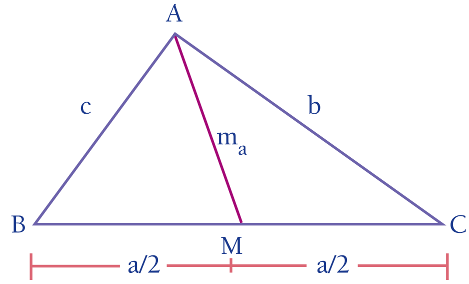
ha = altura con respecto al lado "a"

MEDIANA

Es la recta trazada de un vértice al punto medio del lado opuesto.

1.- De: $b^2 + c^2 = 2\,.\,m_a^2 + \frac{a^2}{2}$

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}}{2}$$

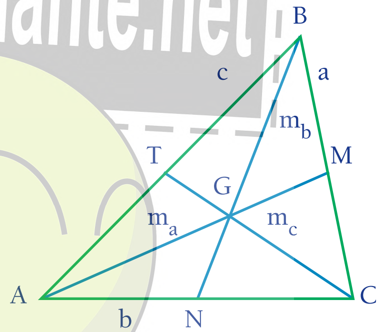


2.- $\boxed{m_b^2 = \frac{a^2}{4} + c^2 - a\,.\,c\,.\,\cos B}$

$\boxed{m_c^2 = \frac{a^2}{4} + b^2 - a\,.\,b\,.\,\cos C}$

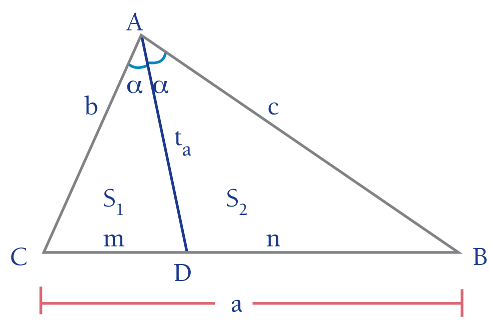
$\boxed{4m_a^2 = b^2 + c^2 + 2\,.\,b\,.\,c\,.\,\cos A}$

La intersección de las tres medianas se denomina CENTRO DE GRAVEDAD o BARICENTRO.



BISECTRIZ INTERIOR

Es la recta que divide a un ángulo interior en dos ángulos iguales.



Fórmulas Geométricas:

1.- $\boxed{\frac{b}{n} = \frac{c}{m}}$

2.- $t_a^2 = b \cdot c - m \cdot n$

Fórmula Trigonométrica:

$$t_a = \frac{2 \cdot b \cdot c}{b + c} \cos \frac{A}{2}$$

La intersección de las tres bisectrices interiores se llama INCENTRO.

BISECTRIZ EXTERIOR

Es la recta que divide a un ángulo exterior en dos ángulos iguales.

Fórmulas Geométricas:

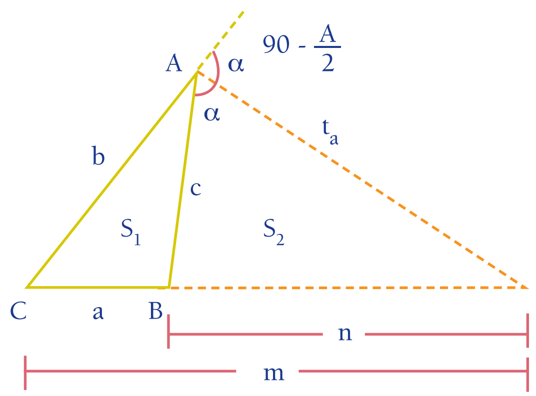
1.- $\frac{b}{n} = \frac{c}{m}$

2.- $t_a^2 = m \cdot n - b \cdot c$

Fórmula Trigonométrica:

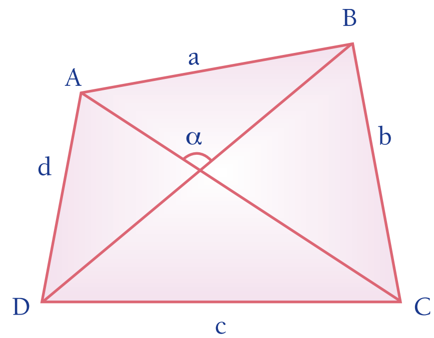
$$t_a = \frac{2 \cdot b \cdot c}{b - c} \operatorname{sen} \frac{A}{2}$$

La intersección de las tres bisectrices interiores se llama EXCENTRO.



CUADRILÁTEROS CONVEXOS

Son cuadriláteros cuyos ángulos son menores que 180º.



SUPERFICIES

1.- $S = \frac{AC \cdot BD}{2} \cdot \operatorname{sen} \alpha$

2.- $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - a.b.c.d.\cos \alpha}$

donde:

p = semiperímetro

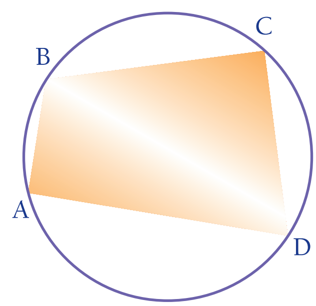
$$\alpha = \frac{\hat{A} + \hat{C}}{2}$$

o :

$$\alpha = \frac{\hat{B} + \hat{D}}{2}$$

CUADRILÁTERO INSCRITO O CICLÍCO

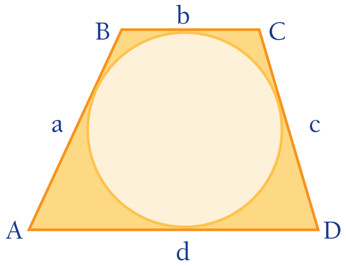
$$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180º$$



$$S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}$$

Fórmula de Brahma-Gupta

CUADRILÁTERO CIRCUNSCRITO



Propiedad de Pitot:

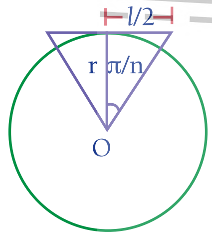
$$\boxed{a + b = c + d = p}$$

POLÍGONOS REGULARES

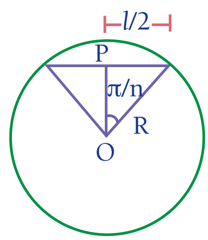
CIRCUNSCRITOS:

Valor del lado "l" y la del área "S"

$$\boxed{l = 2r \,.\, \text{tg}\,\frac{\pi}{n}} \qquad \boxed{S = n \,.\, r^2 \,.\, \text{tg}\,\frac{\pi}{n}}$$



INSCRITOS:



Cálculo del lado "*l*", apotema "Ap" y área "S"

$$\boxed{l = 2r \,.\, \text{sen}\,\frac{\pi}{n}}$$

$$\boxed{Ap = R \,.\, \cos\frac{\pi}{n}}$$

$$\boxed{S = \frac{R^2 \,.\, n}{2} \cdot \text{sen}\,\frac{2\pi}{n}}$$

OP = Ap

n = número de lados

R = radio circunscrito

S = área

PROBLEMA DE POTHENOT-SNELLIUS

Conocido también como problema de los cuatro puntos o problema de la carta (geográfica):

Dados tres puntos no colineales: A, B y C, calcular sus distancias a un cuarto punto D (situado en el plano ABC, interno al ángulo convexo ACB), desde el cual se vean las distancias AC y BC bajo ángulos dados. Se supone como incógnitas los ángulos x e y.

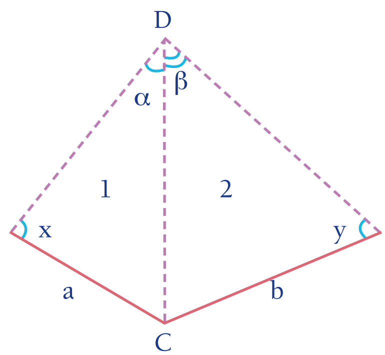
Por ley de senos en los triángulos (1) Y (2):

$$\frac{\text{sen}\,x}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{\overline{DC}}{a}$$

$$\frac{\text{sen}\,y}{\text{sen}\,\beta} = \frac{\overline{DC}}{b}$$

$$\therefore \qquad \frac{\text{sen}\,x}{\text{sen}\,y} = \frac{b\,\text{sen}\,\alpha}{a\,\text{sen}\,\beta} \qquad (1)$$

$$x + y = 360° - (\alpha + \beta + C) \qquad (2)$$



Como a, b, α, β, y $\hat{C}$ se conoce, se tiene un sistema de ecuaciones trigonométricas cuyas incógnitas son "x" e "y". Hallando "x" e "y" el problema queda resuelto, al conocer todos los ángulos y un lado de cada uno de los triángulos (1) y (2).

FÍSICA

Es la ciencia que tiene por objeto el estudio de los cuerpos, sus leyes y propiedades mientras no cambie su composición, así como el de los agentes naturales con los fenómenos que en los cuerpos producen su influencia.

La física puede dividirse de un modo general en dos: Física Experimental y Física Matemática. En la primera, la labor de investigación tiene a obtener sólo datos y axiomas de la Física matemática. Esta última a su vez, partiendo de esos datos experimentales, establece principios de los cuales se deduce, mediante los recursos del cálculo, fórmulas generales.

DEFINICIONES

FENÓMENO

Toda apariencia o manifestación del orden material o espiritual.

ENERGÍA

Causa capaz de transformarse en trabajo mecánico.

MAGNITUD

Tamaño o cantidad de un cuerpo.

MEDIDA

Expresión comparativa de las dimensiones o cantidades.

DIMENSIÓN

Longitud, extensión o volumen de una línea, de una superficie o de un cuerpo, respectivamente. A partir de Einstein, se considera la cuarta dimensión: "el tiempo".

CANTIDAD

Todo lo que es capaz de un aumento o disminución y puede, por consiguientes, medirse o contarse.

ECUACIONES DIMENSIONALES

Son expresiones de la forma algebraica que, valiéndose de las unidades fundamentales representadas por las letras M, F, L, T, se usa para probar fórmulas, equivalencias o para dar unidades a una respuesta (M: masa; F: fuerza; L: longitud; T: tiempo).

SISTEMAS DE UNIDADES

UNIDADES DEL SISTEMA ABSOLUTO

Sub-sistema	L	M	T
CGS	cm	g	s
MKS	m	kg	s
FPS	pie	lb	s

UNIDADES DEL SISTEMA TÉCNICO, GRAVITACIONAL O PRÁCTICO

Sub-sistema	L	F	T
CGS	cm	g	s
MKS	m	kg	s
FPS	pie	lb	s

UNIDADES DEL SISTEMA INTERNACIONAL DE MEDIDA "SI"

UNIDADES DE BASE

MAGNITUD	NOMBRE	SÍMBOLO	DIMENSIÓN
Longitud	metro	m	L
Tiempo	segundo	s	T
Masa	kilogramo	kg	M
Intensidad de corriente Eléctrica	amperio	A	I
Temperatura	kelvin	K	θ
Intensidad Luminosa	candela	ca	J
Cantidad de sustancia	mol	mol	N

UNIDADES SUMPLEMENTARIAS

MAGNITUD	NOMBRE	SÍMBOLO
Ángulo	radián	rad
Ángulo sólido	estereo radián	sr

UNIDADES DERIVADAS

MAGNITUD	NOMBRE	SÍMBOLO
Área	metro cuadrado	m^2
Volumen	metro cúbico	m^3
Densidad	kilogramo por Metro cúbico	kg/m^3
Velocidad	metro por segundo	m/s
Fuerza y peso	newton	N
Presión	pascal	Pa

Ejemplo:

Determinar la ecuación dimensional del peso específico.

Procedimiento:

Sabiendo que: $Pe = \dfrac{W}{V}$

Pero:

$$W = F = m\ .\ a = M \cdot \frac{d}{t^2} = M\,\frac{L}{T^2} = MLT^{-2}$$

y : $V = L^3$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$Pe = \frac{MLT^{-2}}{L^3}$$

$$Pe = ML^{-2}T^{-2}$$

CONVENCIONES BÁSICAS

a) La suma o resta de unidades iguales produce la misma unidad:

$$6T + 8T - T - 7T = T$$

b Las constantes y los coeficientes numéricos se reemplaza por 1:

$$5M - 6{,}5M + 9{,}8M = M$$

$$\pi + 10L = 1 + L = L$$

c) Se escriben en forma de enteros, si hay denominados se escribe con potencia de signo negativo para darle la forma de entero.

Ejemplo: $\dfrac{LM}{T^2} = LMT^{-2}$

d) El signo | | significa "ecuación dimensional de".

e) La dimensión de un ángulo o función trigonométrica es un número, como tal dimensionalmente es 1.

$$|60°| = 1$$

$$|\text{cosec } 45°| = 1$$

f) Dimensionalmente los logaritmos valen 1.

$$|\log 8| = 1$$

$$|\log_n 17| = 1$$

VECTORES

Vector significa "que conduce". Los vectores sirven para representar: fuerza, velocidad, aceleración, etc.

MAGNITUD

La magnitud expresa el tamaño de un cuerpo o la dimensión de algún fenómeno. Puede ser escalar o vectorial.

MAGNITUD ESCALAR O MODULO

Es aquella que está plenamente determinada por un número y una unidad de medida o especie.

Ejemplos:

i) L = 18 yardas

ii) m = 14 lb

iii) t = 6 semanas

MAGNITUD VECTORIAL

Es aquella que además de tener "un número y una especie" tiene dirección y sentido:

Ejemplos:

i) $\vec{a} = 9{,}8 m/s^2$

ii) $\vec{F} = 15$ newton

iii) $\vec{V} = 30$ km/h

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN VECTOR

Se representa por un segmento de una recta orientada. Se utiliza para representar fuerzas, pesos, aceleraciones, etc.

SUMA Y RESTA DE VECTORES

A.- MÉTODOS GEOMÉTRICOS

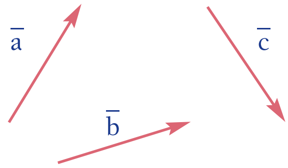
- MÉTODO POLÍGONAL O POLÍGONO FUNICULAR

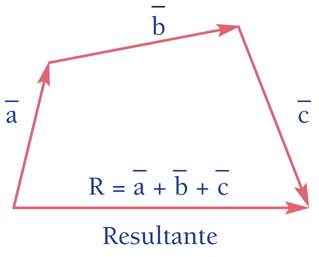
SUMA.- Para sumar vectores:

Se traza, en un mismo plano, los vectores uno a continuación del otro, respetando su magnitud, dirección y sentido se une el origen del primero con el extremo del último y este trazo es la resultante con su magnitud, dirección y sentido.

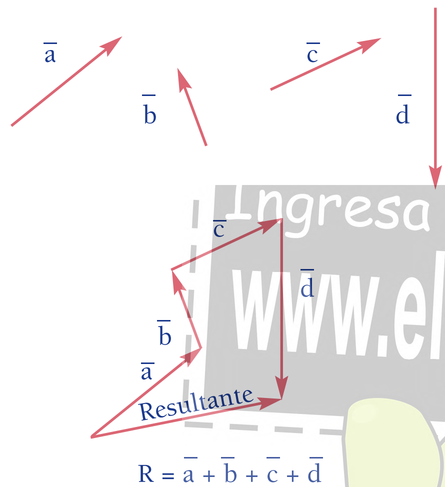
Ejemplos: Sumar los vectores:

i) $\overline{a}$, $\overline{b}$ y $\overline{c}$





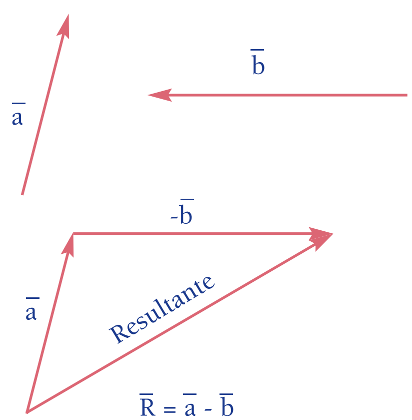
ii) $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$



DIFERENCIA

Se traza el vector minuendo y a continuación el sustraendo **pero en sentido contrario**. Se une el origen del primero con el extremo del segundo y se obtiene la resultante con su magnitud, dirección y sentido.

Ejemplo: Restar $\overline{a} - \overline{b}$



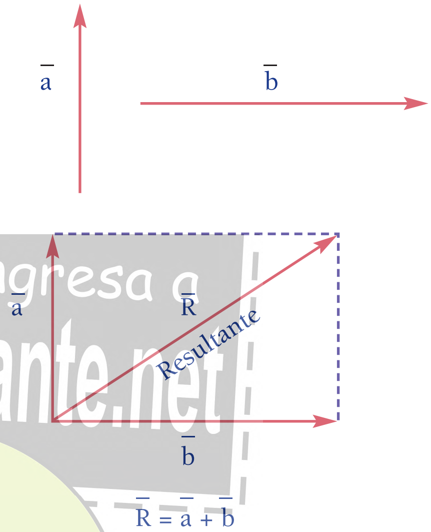
• MÉTODO DEL PARALELOGRAMO

SUMA

Se traza los dos vectores que se va a sumar, partiendo de un mismo punto, luego se completa el paralelogramo; la diagonal es la resultante.

Ejemplo:

Sumar los vectores $\overline{a}$, $\overline{b}$

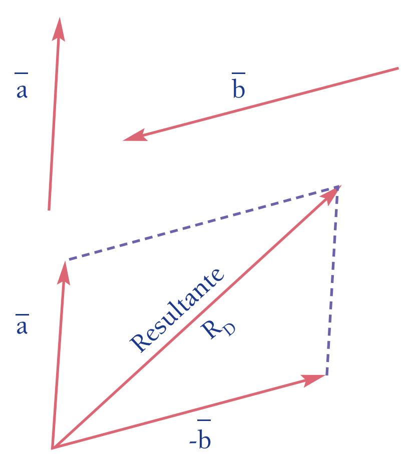


RESTA

Se traza el vector minuendo y luego el vector sustraendo partiendo de ambos del mismo origen pero el sustraendo con sentido contrario. La diagonal del paralelogramo formado es la resultante.

Ejemplo:

Restar: $\overline{a} - \overline{b}$



B.- MÉTODOS ANALITICOS

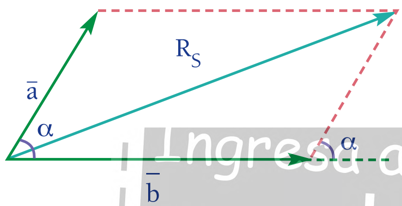
Consiste en calcular algebraicamente la resultante.

• MÉTODO DEL PARALELOGRAMO

SUMA

Resultante de la suma $\vec{a} + \vec{b}$

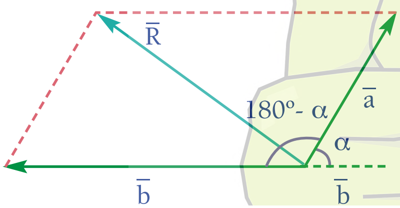
$$R_S = \sqrt{a^2 + b^2 + 2 \, . \, a \, . \, b \, . \cos \alpha}$$



RESTA

Resultante de la diferencia $\vec{a} - \vec{b}$

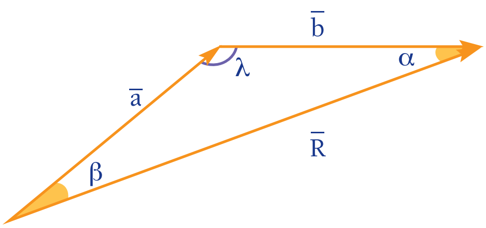
$$R_S = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \, . \, a \, . \, b \, . \cos \alpha}$$



• RESULTANTE POR LEY DE SENOS

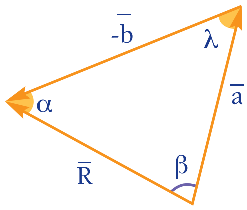
SUMA: Sumar $\bar{a} + \bar{b}$

$$\frac{R}{\operatorname{sen} \lambda} = \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta}$$



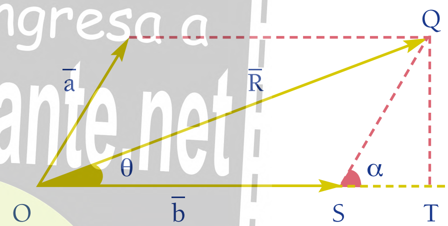
DIFERENCIA: Restar a - b

$$\frac{R}{\operatorname{sen} \lambda} = \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta}$$



DIRECCIÓN DE LA RESULTANTE

Está dada por el ángulo que forma la resultante con uno de los vectores.



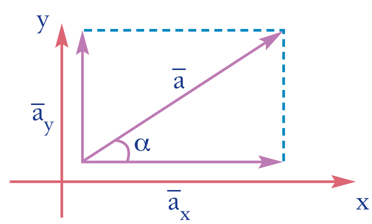
$$\operatorname{sen} \theta = \frac{a \, . \operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2 \, . \, a \, . \, b \operatorname{sen} \alpha}}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{a \, . \operatorname{sen} \theta}{b + a \, . \cos \theta}$$

DESCOMPOSICIÓN DE UN VECTOR EN SUS ELEMENTOS RECTANGULARES

Por el origen del vector ($\bar{a}$) que se quiere descomponer, se traza un sistema de ejes perpendiculares (eje rectangulares), sobre estos ejes . Se proyecta el vector, la proyección sobre el eje "x", se llama "componente horizontal a_x", la proyección sobre el "eje y" se llama "componente vertical a_y".

Ejemplo:



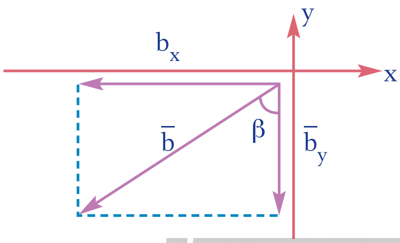
a_x : componente hortizontal.

a_y : componente vertical.

Donde: $a_x = a \cos \alpha$

$a_y = a \text{ sen } \alpha$

Otro ejemplo:



RESULTANTE POR DESCOMPOSICIÓN RECTANGULAR

Hallar la resultante de $\bar{a} + \bar{b}$

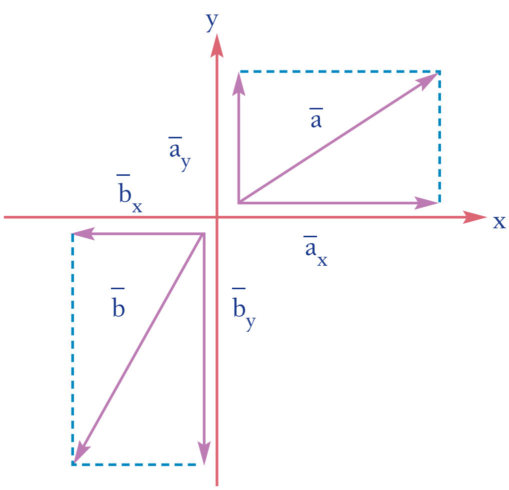
Se descompone a y b en el sistema de ejes rectangulares.

R_x = suma de componentes horizontales.

R_y = suma de componentes verticales.

$$\boxed{R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}}$$

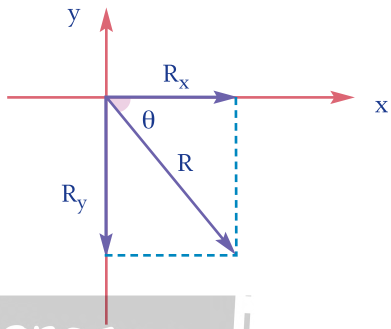
R = resultante final o suma de $\bar{a} + \bar{b}$



Para hallar $\bar{R}_x$ y $\bar{R}_y$, se suma algebraicamente los vectores que están sobre los ejes x e y:

$$\bar{a}_x + \bar{b}_x = \bar{R}_x$$

$$\bar{a}_y + \bar{b}_y = \bar{R}_y$$



Finalmente:

$$\bar{R}_x + \bar{R}_y = \bar{R} \Rightarrow \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = R$$

DIRECCIÓN DE LA RESULTANTE

$$\boxed{\text{tg } \theta = \frac{R_y}{R_x}}$$

MECÁNICA

Mecánica es la parte de la Física que trata del movimiento y de las fuerzas que pueden producirlo, consideradas con toda generalidad, así como del efecto que producen en las máquinas. Tienen tres partes:

1.- Mecánica de sólidos:

a) Cinemática

b) Estática

c) Dinámica

2.- Mecánica de los líquidos:

a) Hidrostática

b) Hidrodinámica

3.- Mecánica de los gases:

a) Neumostática

b) Neumodinámica

A. CINEMÁTICA

Es el estudio del movimiento de los sólidos, independientemente de las causas que lo originan.

CONCEPTOS

MOVIMIENTO

Acción o efecto del desplazamiento de un cuerpo en un lapso de tiempo con respeto a otro que se supone fijo.

TRAYECTORIA

Es la línea geométrica descrita por las distintas posiciones que va ocupando un punto o cuerpo, que se mueve en un lapso de tiempo.

Según la trayectoria del movimiento puede ser:

a) Rectilíneo b) Curvilíneo

c) Circuferencial d) Parabólico

CLASES DE MOVIMIENTO

a) Uniforme b) Variado

c) Uniformemente variado

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME (M.R.U.)

$$\boxed{V = \frac{e}{t}}$$

Unidades SI: $\frac{m}{s}$

Donde:

V = velocidad o rapidez.

e = distancia recorrida en el timpo “t”.

t = tiempo que dura el movimiento.

MOVIMIENTO VARIADO

Cuando su velocidad o rapidez varía desordenadamente.

VELOCIDAD O RAPIDEZ MEDIA

Es un promedio de las rapideses de un móvil.

$$\boxed{V_m = \frac{e_t}{t_T}}$$

o:

$$\boxed{V_m = \frac{e_1 + e_2 + \dots}{t_1 + t_2 + \dots}}$$

$$\boxed{V_m = \frac{V_1 + V_2}{2}}$$

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE VARIADO (M.R.U.V.)

$$\boxed{\Delta V = V_f - V_i}$$

ΔV = variación de la rapidez o velocidad.

V_f = velocidad o rapidez final.

V_i = velocidad o rapidez inicial.

ACELERACIÓN

$$\boxed{a = \frac{\Delta V}{t}}$$

o:

$$\boxed{a = \frac{V_f - V_i}{t}}$$

Unidades SI: $\frac{m}{s^2}$

RAPIDEZ FINAL CON VELOCIDAD INICIAL

$$\boxed{V_f = V_i + a \cdot t}$$

Unidades: $V = \frac{m}{s}$; $a = \frac{m}{s^2}$; $t = s$

ESPACIO “e” RECORRIDO CON ACELERACIÓN Y VELOCIDAD INICIAL

$$\boxed{e = V_i \cdot t \pm \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2}$$

cuando $V_i = 0$: $\boxed{e = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2}$

VELOCIDAD FINAL "V_f" EN FUNCIÓN DE V_i, a, e

$$V_f^2 = V_i^2 \pm 2 \,.\, a \,.\, e$$

MOVIMIENTO VERTICAL

Es el movimiento de un cuerpo que sigue la direccion radial de la Tierra. El movimiento es uniformemente variado, la aceleración es la aceleración de la gravedad (g = 9,8 m/s²). Cuando el movimiento es "hacia arriba", la aceleración "g" es negativa, cuando el movimiento es "hacia abajo", la aceleración "g" es positiva.

$$h = V_i \,.\, t \pm gt^2$$

$$V_f = V_i \pm gt$$

$$V_f^2 = V_i^2 + 2gh$$

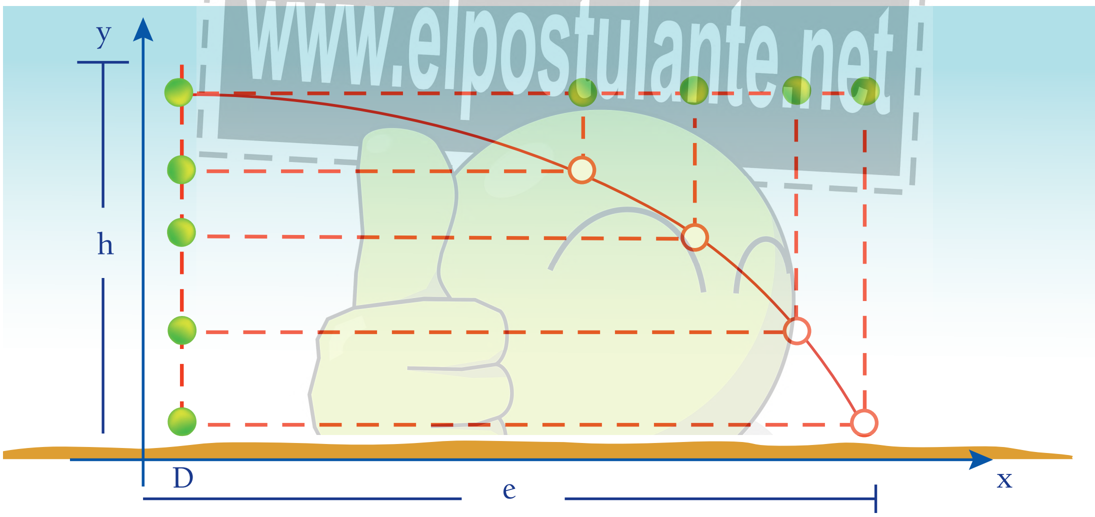
Donde:

h: altura de subida o de caída

g: aceleración de la gravedad (9,8 m/s² o 32 pies/s²). De subida (-), de bajada (+).

MOVIMIENTO COMPUESTO

Es aquel en el cual existen simultáneamente 2 o más tipos de movimiento. Por ejemplo: movimiento horizontal y vertical a la vez.



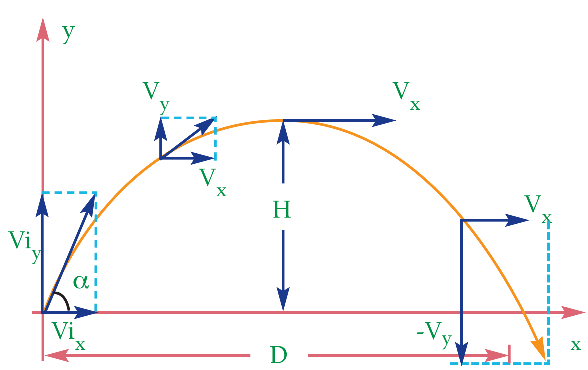
PRINCIPIO DE LA INDEPENDENCIA DE LOS MOVIMIENTOS (Principios de Galileo)

"Si un cuerpo tiene movimiento compuesto, cada uno de los movimientos se cumple como si los demás no existieran".

MOVIMIENTO PARABÓLICO (Introducción a la balística)

El movimiento de un proyectil en el vacío resulta de la composición de un movimiento horizontal rectilíneo y uniforme, y un movimiento vertical uniformemente variado por la acción de la aceleración de la gravedad.

CARACTERÍSTISTICAS DEL MOVIMIENTO PARABÓLICO



a) Forma de la trayectoria: “parabola”.

b) Velocidad del movimiento horizontal V_x: CONSTANTE

$$V_x = V_i \cdot \cos\alpha$$

c) Velocidad vertical V_y: UNIFORMEMENTE VARIADA

1) Rapidez vertical inicial:

$$V_{iy} = V_i \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

2) Rapidez vertical en un punto cualquiera de la trayectoria, de acuerdo al tiempo.

$$V_y = V_i \operatorname{sen}\alpha \mp g \cdot t$$

d) Tiempo “t” de vuelo cuando “H” decrece hasta cero.

$$H = V_i \cdot \operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Entonces, cuando H = 0:

$$t = \frac{2V_i \cdot \operatorname{sen}\alpha}{g}$$

e) Tiempo para alcanzar su máxima altura “H”.

La altura es máxima cuando $V_y = 0$

$$\Rightarrow V_y = V_i \cdot \operatorname{sen}\alpha - gt$$

de donde y considerando $V_y = 0$

$$t = \frac{V_i \cdot \operatorname{sen}\alpha}{g}$$

f) Alcance vertical “H”:

$$H = \frac{V_i^2 \cdot \operatorname{sen}^2\alpha}{2g}$$

El alcance vertical es máximo cuando $\alpha = 90°$

g) Alcance horizontal “D”

$$H = \frac{V_i^2 \cdot \operatorname{sen}2\alpha}{2g}$$

El alcance horizontal es máximo cuando $\alpha = 45°$

MOVIMIENTO CIRCUNFERENCIAL UNIFORME (M.C.U.)

Es aquel en el cúal la trayectoria es una circunferencia; barre arcos y barre ángulos iguales en tiempos iguales.

PERÍODO

Es el tiempo “t” que tarda un móvil en dar una vuelta a una revolución a la circunferencia.

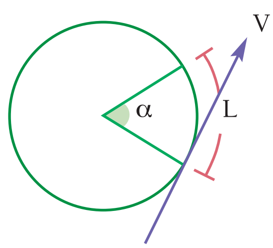
Velocidad lineal “V”:

$$V = \frac{\text{arco “L”}}{t}$$

Velocidad angular “ω”

$$\omega = \frac{\text{ángulo “}\alpha\text{”}}{t}$$

Unidades SI: $\frac{rad}{s}$



VELOCIDAD O RAPIDEZ ANGULAR Y PERÍODO

Siendo “T” el período o tiempo empleado por un móvil en dar una vuelta(2π radianes), la velocidad angular es:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$